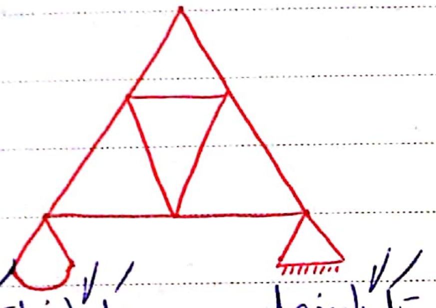
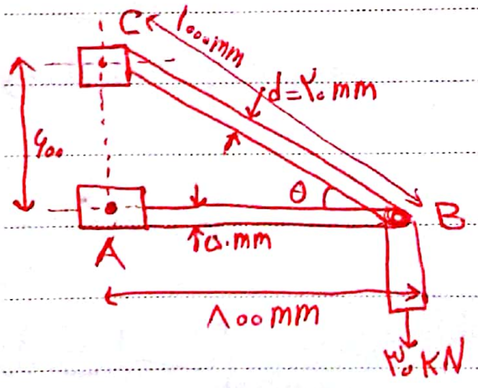
کوئیز اول از فصل ۱ و ۲ و کوئیز ۲ از فصل ۳

* هدف اصلی از درس مقاومت مصالح فراهم آوردن اطلاعاتی است که بتوان با استفاده از آنها، سازه های مهندسی را طراحی و تحلیل کرد و منظور از طراحی و تحلیل در بحث مقاومت محاسبه تنش ها و تغییر شکل های اعضای یک سازه است!

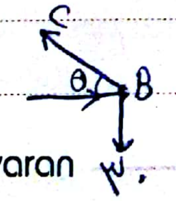


مثال: سازه نشان داده شده در شکل زیر را که برای نگه داشتن باری برابر ۳۰ kN طراحی شده است در نظر بگیرید! این سازه از بازوی AB با مقطع مستطیلی به ابعاد ۸۰۰×۵۰ mm و میله BC با مقطع دایره‌ای به قطر ۲۰ mm تشکیل شده است! نیرو در اعضای AB و BC را بدست آورید!



در مورد مفصل ها معادله گشتاور نداریم ⟸ $\begin{cases}\Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0\end{cases}$

$\sin\theta = \frac{600}{1000} = 0.6$



$\cos\theta = \frac{800}{1000} = 0.8$

pilavaran

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{BC}\sin\theta - 30 = 0 \rightarrow F_{BC} = 50\ kN$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{BC}\cos\theta = F_{AB} \rightarrow F_{AB} = 40\ kN$

T کششی

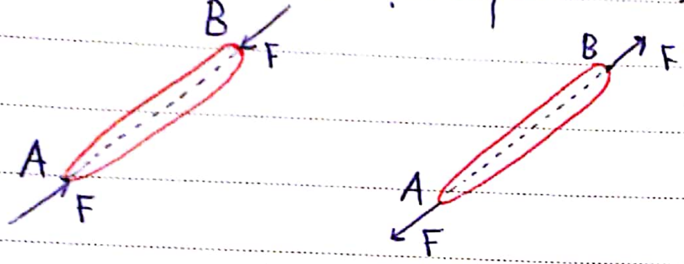
C فشاری

Scanned by CamScanner

Subject . Year. Month. Day.

اعضای ۲ نیروی:

۱ـ هم راستا باشند (نیرو در ۲ مفصل)   ۲ـ خلاف جهت هم باشند   ۳ـ هم اندازه باشند



تنش نیروی وارد بر سطح مقطع و یا شدت نیروی توزیع شده روی یک مقطع را تنش Stress می نامند و آن را با حرف σ نشان می دهند.

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad \left(\frac{N}{m^2} = Pa\right)$$

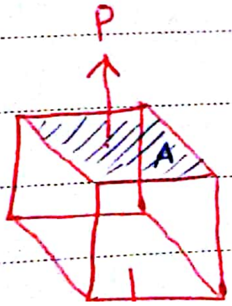
P: نیروی وارد بر عضو
A: سطح مقطع عضو مورد نظر

عوامل موثر: ۱ـ مساحت سطح مقطع عضو   ۲ـ جنس عضو

* اگر عضو تحت نیروی کششی قرار داشته باشد، تنش اعمالی به آن تنش کششی است و مقدار آن را با علامت + نشان می دهند. ($\sigma > 0$)

* اگر عضو تحت نیروی فشاری قرار داشته باشد تنش اعمالی به آن تنش فشاری است و مقدار آن را با علامت − نشان می دهند ($\sigma < 0$)

نکته: تمام مسائل مقاومت در حالت تعادل استاتیکی هستند (شتاب ندارند و یا جسم ثابت است)



تعادل استاتیکی $P = P'$

$$\sigma_{ave} = \frac{P}{A} \qquad \sigma_{ave} \simeq \sigma$$

Scanned by CamScanner

Subject .　　　　　　　　Year.　　Month.　　Day.

واحدها:

فشار:

$1Pa = 1\frac{N}{m^2}$ و $KPa = 10^3 Pa$ و $MPa = 10^6 Pa$

$GPa = 10^9 Pa$

$Lb \simeq 425 gr$　　　$KiP = 1000 Lb$

واحد فشار $Ps = \frac{1Lb}{1in^2}$　　　$KSi = 1000 PSi = \frac{1000 Lb}{in^2}$

مثال: سازه شکل مثال اول را در نظر بگیرید و فرض کنید میله BC با فولادی با حداکثر تنش مجاز $\sigma_{all} = 165 MPa$ ساخته شده است. آیا میله BC برای تحمل باری که بر آن وارد می شود ایمن است یا خیر؟

$A_{BC} = \pi r^2$

$\sigma_{CB} = \frac{F_{CB}}{A_{BC}} = \frac{50 KPa}{(0/01)^2 \pi} \simeq 159 MPa$

$\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$

$\left.\begin{matrix}\sigma_{CB} < \sigma_{all} \\ 159 < 165\end{matrix}\right\}$ سازه ایمن است

سوالات مهم فصل: ۱_۷_۱۰_۱۸_۱۹_۲۶_۳۱_۳۵_۳۸_۴۱_۴۵_۵۱_۵۵_۶۲

انواع تنش:

① قائم (نرمال) <
- کششی ($\sigma > 0$) ← سیگما
- فشاری ($\sigma < 0$)

② برشی (τ) تاو

pilavaran

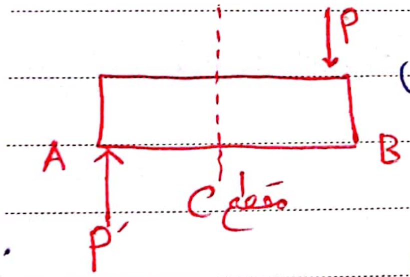
Scanned by CamScanner

Subject . Year. Month. Day.

وقتی توزیع تنش ها را در مقطعی یکنواخت فرض می کنیم باید توجه شود که عملاً برآیند نیروهای
داخلی (P) باید به مرکز جرم (مرکز سطح) مقطع اعمال شود! به عبارتی توزیع یکنواخت
تنش فقط به شرطی امکان پذیر است که خط اثر بار متمرکز P از مرکز جرم مقطع
مورد نظر بگذرد؛ این نوع بارگذاری را مرکزی گویند!

تنش برشی:

عامل ایجاد کننده تنش برشی نیروی عرضی وارد بر سطح مقطع جسم مورد نظر است!



جسم در حال تعادل استاتیکی $\Leftarrow \Sigma F_y = 0 \rightarrow P = P'$

$$\tau = \frac{P}{A}$$

τ: تنش برشی
P: نیروی عرضی
A: سطح مقطع در بخش C

P: نیروی اعمال شده عرضی بر مقطع C

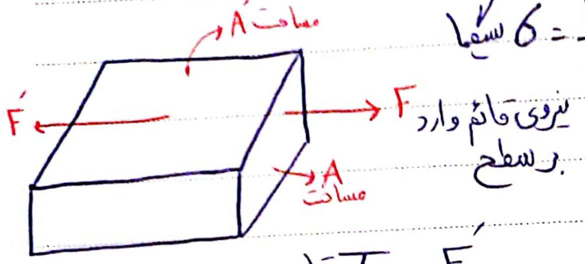
Scanned by CamScanner

Subject .   Year.   Month.   Day.

stress : تنش

$$\text{تنش} = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}}$$

نیروی قائم بر سطح (F) ← تنش قائم (نرمال) $\sigma = \frac{F}{A}$ سیگما

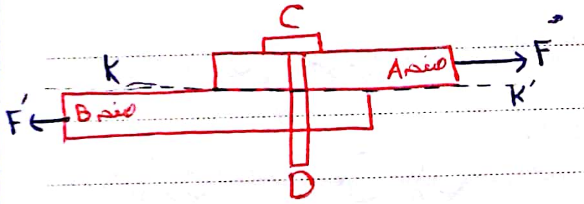


نیروی عرضی وارد بر سطح (F') ← تنش برشی $\tau = \frac{F'}{A'}$ تاو

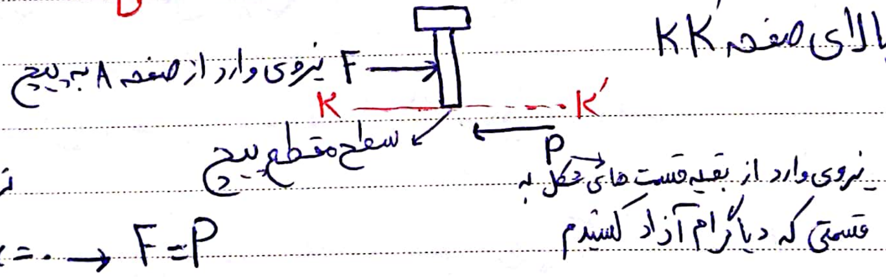
F' : نیروی عرضی وارد بر سطح

برش ساده: تعداد فصل مشترک (صفحات مشترک) بین قطعات های پیچ (پین) یک عدد است

صفحه برش ساده است KK'



دیاگرام آزاد پیچ بالای صفحه KK'



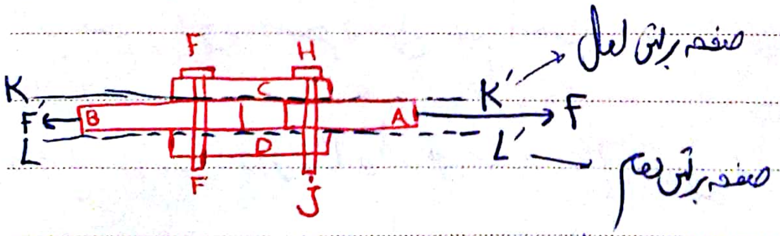
شرط تعادل

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F = P$

$$\underset{\text{تنش برشی وارد بر پیچ}}{\tau} = \frac{P}{\underset{\text{سطح مقطع پیچ}}{A}} = \frac{F}{A}$$

تنش برشی ساده

پیچ تحت برش مضاعف:

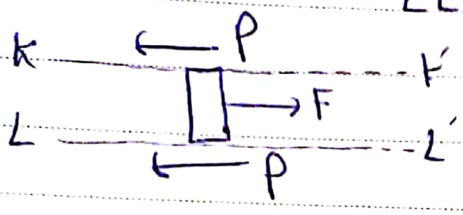


* جسم در حال تعادل استاتیکی است.

* صفحات C و D هم ضخامت و هم جنس است

pilavaran

دیاگرام آزاد پیچ H بین صفحات برش KK' و LL'



شرط برقراری تعادل $\sum F_x = 0 \rightarrow F = P + P \rightarrow F = 2P \rightarrow P = \frac{F}{2}$

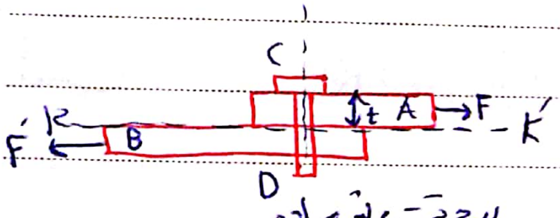
تنش برش وارد بر پیچ تحت برش مضاعف

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{\frac{F}{2}}{A} = \frac{F}{2A}$$

(A: سطح مقطع پیچ)

تنش تکیه گاهی در اتصال ها: σ_b

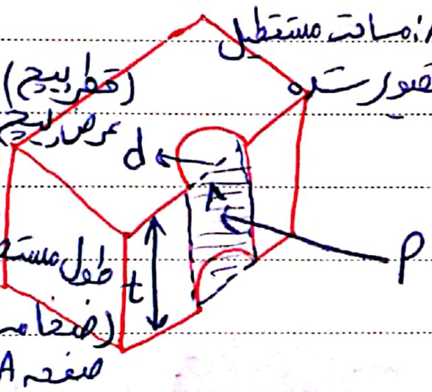
(b: base، تکیه گاه)



پیچ تحت برش ساده

پیچ ها، پین ها و پرچ ها در عضو هایی که به هم اتصال می دهند تنش هایی در امتداد سطح تکیه گاه یا سطح تماس آنها ایجاد می کنند. برای مثال در حالت برش ساده در پیچ که قبلاً بحث شد نیروی F از ورق بر پیچ وارد می گردد و در خلاف آن نیروی P از پیچ بر روی سطح داخلی نیم استوانه ورق به قطر d و به ضخامت ورق t وارد می شود. این تنش را تنش تکیه گاهی گویند (σ_b) و از تقسیم نیروی P بر مساحت مستطیل تصویر پیچ بر روی مقطع ورق بدست

بخش بالایی صفحه برش KK'
$F = P$



pilavaran

Scanned by CamScanner

Subject . Year. Month. Day.

می آید

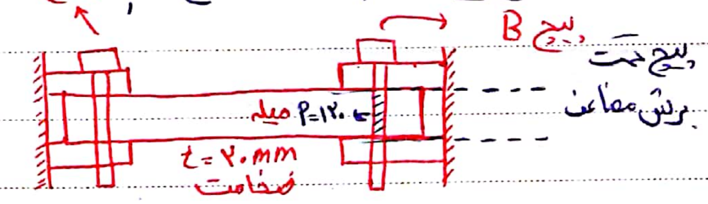
تنش تکیه گاهی $\sigma_b = \frac{P}{A} = \frac{P}{t.d}$

P: نیروی عکس العمل وارد از پیچ به ورق و طبیعتاً برابر F است.

F: نیروی وارد از ورق به پیچ

مثال: میله رابط فولادی نشان داده شده باید طوری طراحی شود که بعد از اتصال به قلاب های مضاعف در A و B بتواند نیروی کششی برابر با $P=120\,KN$ را تحمل کند، این میله باید از ورقی به ضخامت 20mm ساخته شود. برای فولاد بکار رفته، حداکثر تنش های مجاز عبارت اند از: $\sigma = 175\,MPa$ و $\tau = 100\,MPa$ و $\sigma_b = 350\,MPa$ بدست آورید:

الف) قطر d پیچ؟ ب) بعد b در هر سر میله و بعد h میله؟



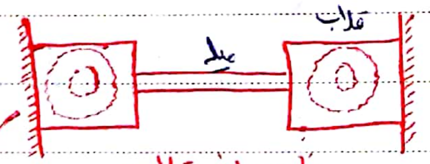
نمای بالای قلاب مضاعف

(الف)

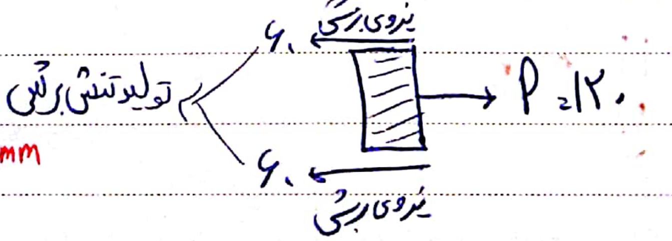
$\tau = \frac{F}{A}$ مساحت مقطع پیچ

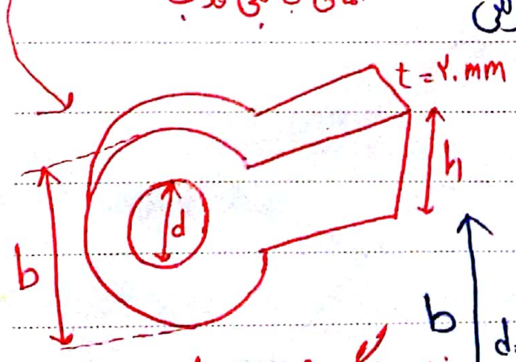
$100\,MPa = \frac{60\times10^3\,N}{\frac{\pi}{4}d^2} \rightarrow d = 27.6mm \rightarrow 28$

* همیشه رو به بالا باید رند شود



نمای جانبی قلاب

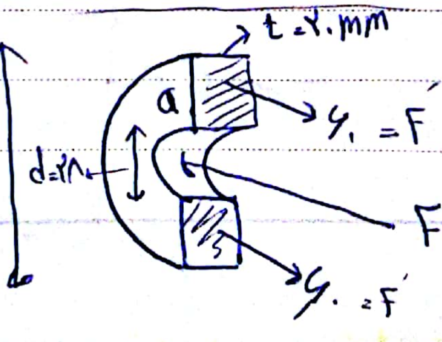




نمای بزرگ شده سر میله

$MPa = \frac{N}{mm^2}$

(ب)



نیروی عکس العمل وارد از پیچ به انتهای میله

pilavaran

Scanned by CamScanner

Subject . Year. Month. Day.

$b = ۲a + d$

$\sigma = ۱۷۵\ \text{MPa} = \dfrac{۶۰ \times ۱۰^{۳}\ N}{۲۰a} \rightarrow a = ۱۷,۱۴$

$b = d + ۲a \rightarrow ۶۲,۳\ mm$

$۱۷۵ = \dfrac{۱۲۰ \times ۱۰^{۳}}{۲۰ \times h} = ۳۴,۲۸\ mm = ۳۵\ mm$ ج

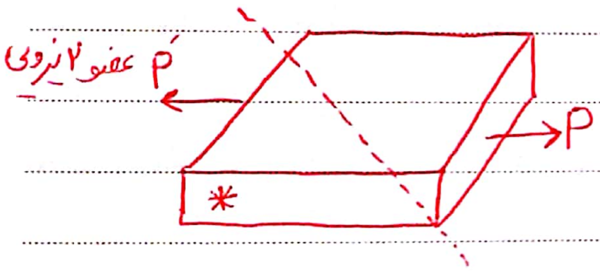
تنش های وارد بر صفحه مایل تحت بارگذاری محوری:

از شکل ها داریم:

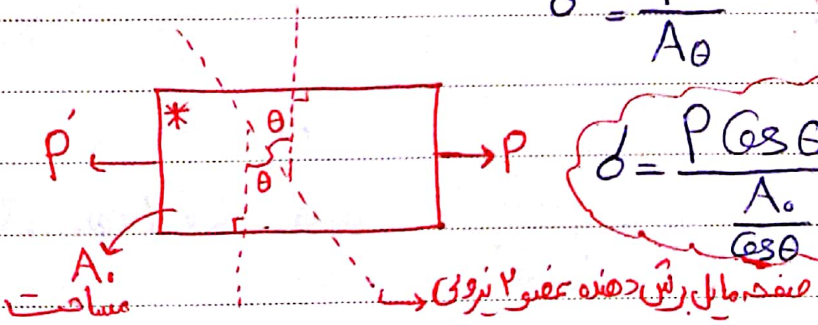
$F = P\cos\theta$

$V = P\sin\theta$

$A_0 = A_\theta \cdot \cos\theta$

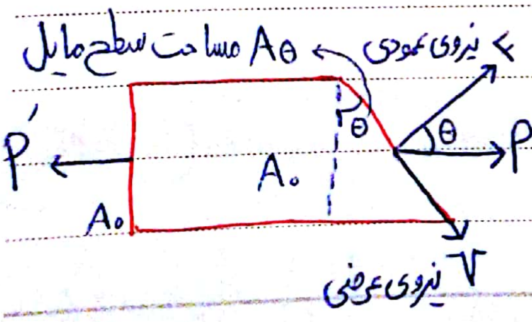


$\sigma = \dfrac{F}{A_\theta}$

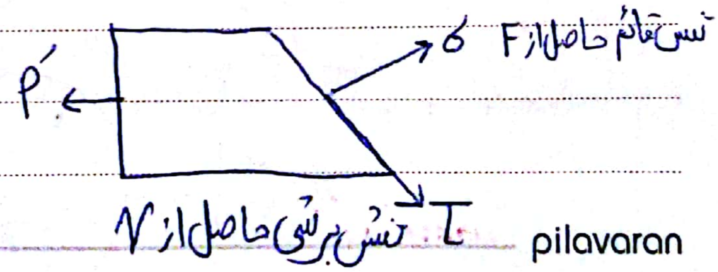


$\sigma = \dfrac{P\cos\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \dfrac{P}{A_0}\cos^2\theta$ تنش مایل بر صفحه قائم

تعادل استاتیکی ⇓ $P = P'$



⟹



pilavaran

* F و V مولفه های نمودار P

Scanned by CamScanner

Subject .   Year.   Month.   Day.

$$\tau = \frac{V}{A_\theta} = \frac{P\sin\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} \Rightarrow \tau = \frac{P}{A_0}\sin\theta\cdot\cos\theta$$ تنش برشی وارد بر صفحه مایل

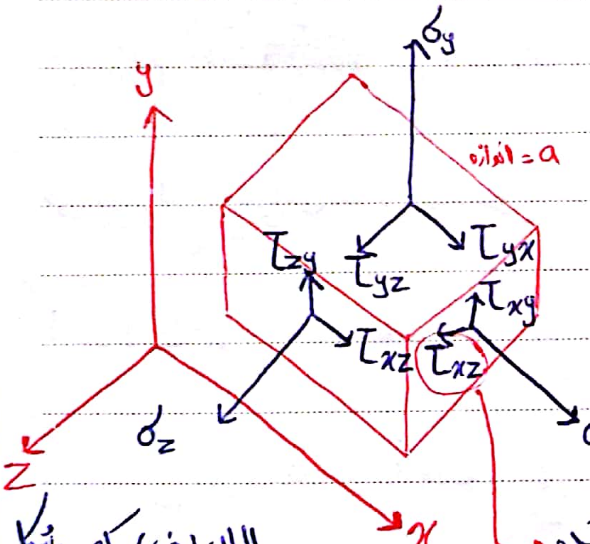
تنش های وارد بر یک عضو ۲ نیروی تحت بارگذاری محوری در صفحه مایل :

اگر $\theta = 0$ باشد $\rightarrow$ $\sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2 0 = \frac{P}{A_0}$ و $\tau = 0$ *

اگر $\theta = 45^\circ$ باشد $\rightarrow$ $\sigma = \frac{P}{A_0}\cos^2 45 = \frac{P}{A_0}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{P}{2A_0}$

$\tau = \frac{P}{A_0}\sin 45 \cos 45 = \frac{P}{2A_0}$ $\Bigg\}$ $\sigma = \tau$ *

* زوایای ۴۵° و ۰° از زوایای رایج و مهم هستند!



تنش در شرایط بارگذاری کلی :

نیروهای اعمال شده به حجم در تمام محورها

المان (جزء) مکعب شکل

نحوه نام گذاری : ① اندیس اول : محوری که توسط آن صفحه قطع شده
② اندیس دوم : محوری که موازی با محور مورد بحث است

$$\text{تنش} = \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}}$$

برای حفظ تعادل به وجوه (سطوح) ناپیدا نیرو و در نتیجه تنش های یکسانی اعمال می شود . این ۹ مولفه تنش مستقل $\Longleftarrow$ تبدیل به ۶ مولفه تنش مستقل می شود

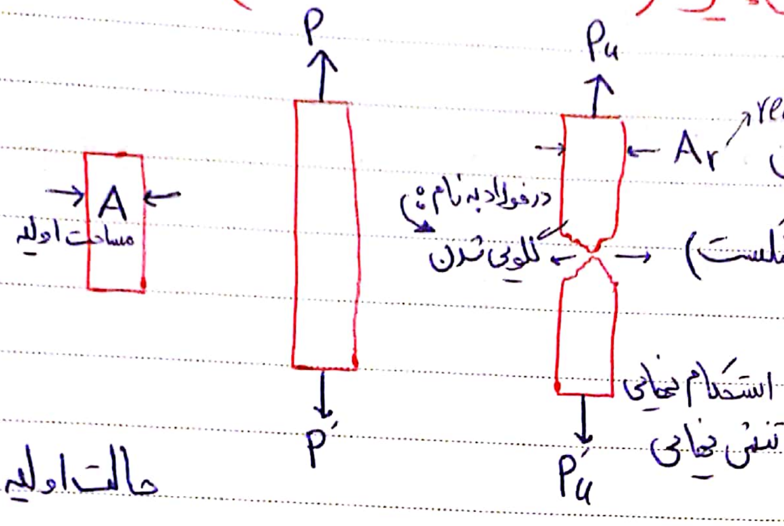
pilavaran

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$
$\tau_{yz} = \tau_{zy}$
$\tau_{zx} = \tau_{xz}$ $\Bigg\}$ $\Rightarrow$ ۶ مولفه تنش مستقل در شرایط بارگذاری کلی $\Rightarrow$ $\begin{cases}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \sigma_y & \tau_{yz}\\ \sigma_z & \tau_{zx}\end{cases}$

* یعنی ۳ مولفه به دلیل ایجاد کوپل حذف شدن و ۶ مولفه باقی موند

Scanned by CamScanner

استحکام نهایی یک ماده: (مواد شکل پذیر) ductile (مثل فولادها)



تنش نهایی $\sigma_u = \frac{P_u}{A}$ → مساحت اولیه

$P_u > P$

↑P ← طول نمونه ↑

در حال تعادل استاتیکی $P' = P$

u: ultimate

می توانیم نمونه فولادی یا از جنس شکل پذیر را تحت کشش قرار دهیم!

می بینیم که با افزایش مقدار نیرو طول و قطر نمونه تغییر می کند! در نهایت به نیروی Max می رسیم

که در آنجا نمونه یا می شکند و یا شروع به تحمل نیروی کمتری می کند! این نیروی نهایی را با P_u

نشان می دهند. از تقسیم این نیروی نهایی بر سطح مقطع اولیه حجم به تنش قائم

نهایی یا استحکام نهایی ماده در حالت کشش (σ_u) می رسیم

ضریب اطمینان (ایمنی) (Safety Factor) S.F :

$$S.F = \frac{\text{نیروی نهایی}}{\text{نیروی مجاز}}$$

نیروی نهایی → F_u برای هر متریال

نیروی مجاز → F_{all} نیروی مجاز در طراحی — all: allowable

$$S.F = \frac{\sigma_u}{\sigma_{all}}$$

σ_u: تنش نهایی — σ_{all}: تنش مجاز

⇐ σ تنش کاربردی شما در فرایند طراحی مهندسی

pilavaran

Scanned by CamScanner

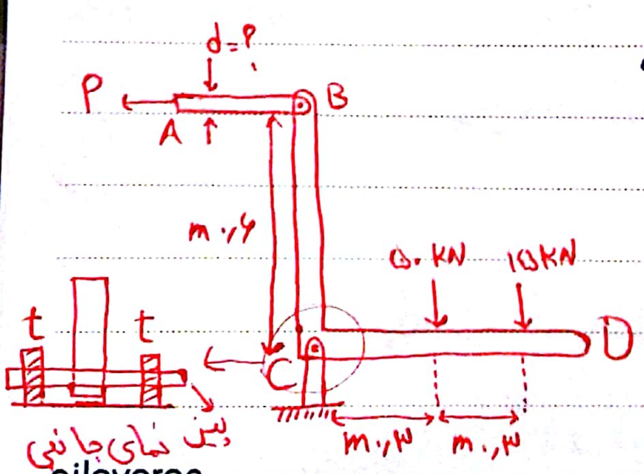
بیشترین باری که یک سازه یا قطعه در شرایط کارکرد عادی مجاز به حمل آن است به طور قابل ملاحظه ای کمتر از بار نهایی است. این بار کمتر را بار مجاز می نامند. نسبت بار نهایی به بار مجاز یا تنش نهایی به تنش مجاز را ضریب اطمینان می نامند.

مثال: ۲ نیرو مطابق شکل زیر به پایه BCD وارد می شود:

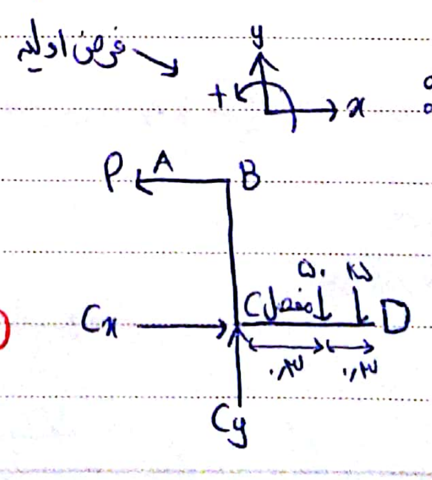
الف) با این اطلاع که میله AB باید از فولادی با تنش قائم نهایی ۶۰۰MPa ساخته شود قطر میله را طوری تعیین کنید که ضریب اطمینان آن ۳٫۳ باشد؟

ب) پین واقع در C باید از فولادی با تنش برشی نهایی ۳۵۰MPa ساخته شود. قطر پین C را طوری تعیین کنید که ضریب اطمینان آن نسبت به برش هم ۳٫۳ باشد!

ج) با این اطلاع که تنش تکیه گاهی مجاز فولاد بکار رفته ۳۰۰MPa است، ضخامت لازم تکیه گاه های پایه در C را بدست آورید؟



دیاگرام آزاد میله BCD:



pilavaran

Scanned by CamScanner

Subject . Year. Month. Day.

الف

$$\sum M_C = 0 \rightarrow -50 \times 0.3 - 15 \times 0.6 + P \times 0.6 \rightarrow P = 40\,kN$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -P + C_x = 0 \rightarrow C_x = P = 40\,kN$$

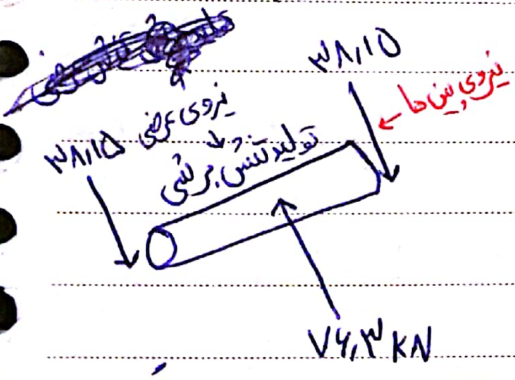
$$\sum F_y = 0 \rightarrow -50 - 15 + C_y = 0 \rightarrow C_y = 65\,kN$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \Rightarrow C = 76.3\,kN$$

$$* \frac{N}{mm^2} = MPa$$

$$S.F = \frac{\sigma_u}{\sigma_{all}} \rightarrow 3.3 = \frac{600\,MPa}{\sigma_{all}} \rightarrow \sigma_{all} = 181.8\,MPa$$

$$\sigma_{all} = \frac{P}{\frac{\pi}{4} d_{AB}^2} \rightarrow 181.8\,MPa = \frac{40 \times 10^3\,N}{\frac{\pi}{4} d_{AB}^2} \rightarrow d_{AB} = 16.7\,mm \rightarrow 17\,mm$$



ب)

$$S.F = \frac{\tau_u}{\tau_{all}}$$

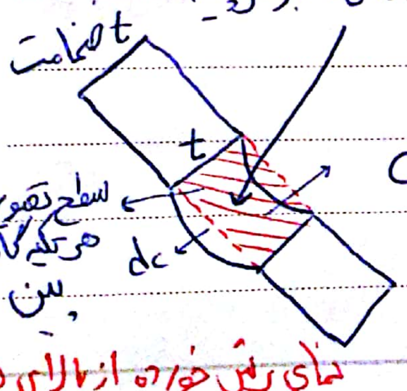
$$3.3 = \frac{350\,MPa}{\tau_{all}} \rightarrow \tau_{all} = 106.1\,MPa$$

تنش برشی

$$\tau_{all} = 106.1\,MPa = \frac{\frac{76.1}{2} \times 10^3\,N}{\frac{\pi}{4} d_c^2} \rightarrow d_c = 21.4\,mm \rightarrow 22\,mm$$

ج)

چون ۲ تکیه‌گاه داریم ← $\frac{76.3}{2}\,kN$ = نیروی تکیه‌گاهی وارد بر هر پایه



مساحت مستطیل $A = t \cdot d_c$

$$\sigma_{all} = 300\,MPa = \frac{\frac{76.3}{2} \times 10^3}{t \times 22} \rightarrow t = 5.78\,mm$$

$$t = 6\,mm$$

تمامی برش خورده از بالای هر تکیه‌گاه (پایه)

pilavaran

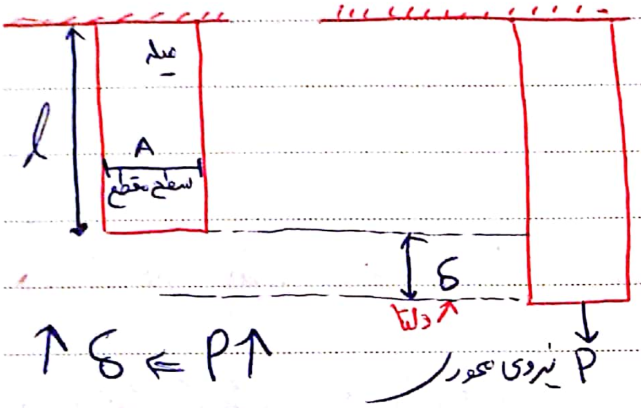
Scanned by CamScanner

Subject . فصل دوم   Year.   Month.   Day.

تنش و کرنش تحت بارگذاری محوری :

در این فصل تغییر شکل تیر، میله یا ورق را تحت بارگذاری محوری بررسی می کنیم !

کرنش : کرنش قائم در یک میله تحت بارگذاری محوری را تغییر شکل طول واحد میله تعریف کرده و با ε (اپسیلون) نشان می دهیم !



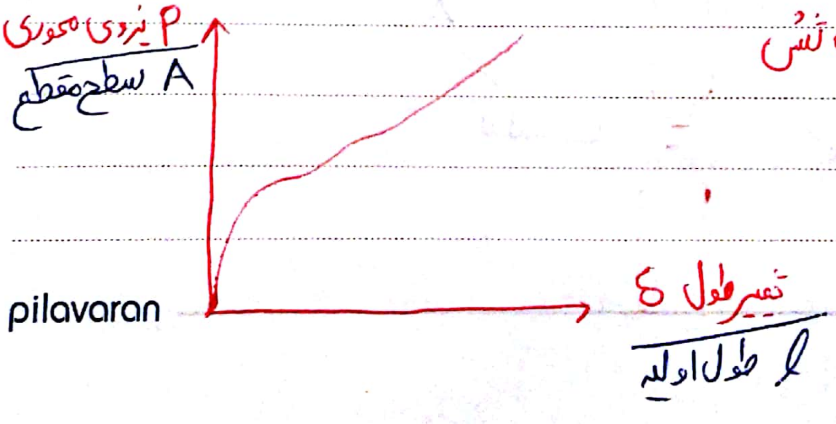
$\uparrow \delta \Leftarrow P \uparrow$

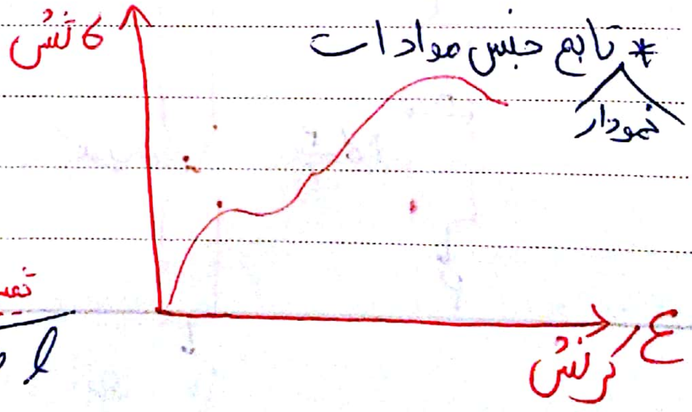
σ = تنش = $\frac{P}{A}$

کرنش $\varepsilon = \frac{\delta}{l}$ $\frac{\text{تغییر طول}}{\text{طول اولیه}}$ $\frac{(m)}{(m)}$ <= ε کمیتی بدون بعد است

نمودار تنش-کرنش : با رسم تنش ($\sigma = \frac{P}{A}$) نسبت به کرنش ($\varepsilon = \frac{\delta}{l}$)

منحنی بدست می آوریم که تابع خواص ماده جسم (عضو) مورد نظر است و به ابعاد یا هندسه نمونه بکار برده شده وابسته نیست ! این را نمودار تنش-کرنش گویند !





* تابع جنس مواد (نمودار)

pilavaran

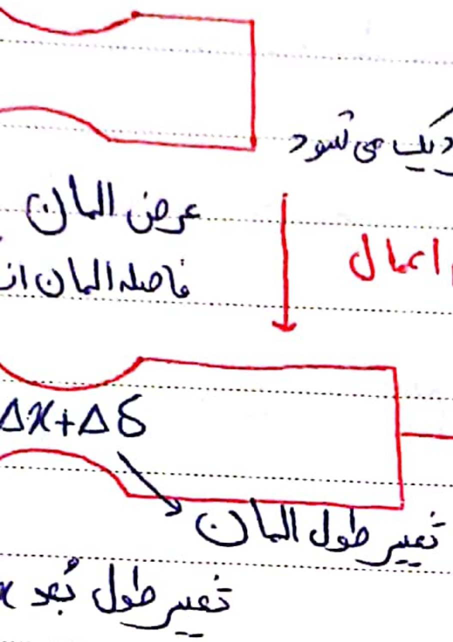
Scanned by CamScanner

فصل ۲: ۱ـ ۷ـ ۱۳ـ ۱۷ـ ۲۳ـ ۲۷ـ ۳۳ـ ۴۱ـ ۴۵ـ ۴۹ـ ۵۱ـ
۶۲ـ ۶۵ـ ۶۶ـ۶۷ـ۶۸ـ ۷۵ـ ۸۱ـ ~~۸۷~~
پیرجانسون ـ ویرایش ۶ـ ترجمه ابراهیم واحدی ـ ۹۵ـ ۹۶ـ ۹۷ـ ۱۲۵ـ ۱۲۸

کرنش در عضوی با سطح مقطع متغیر:

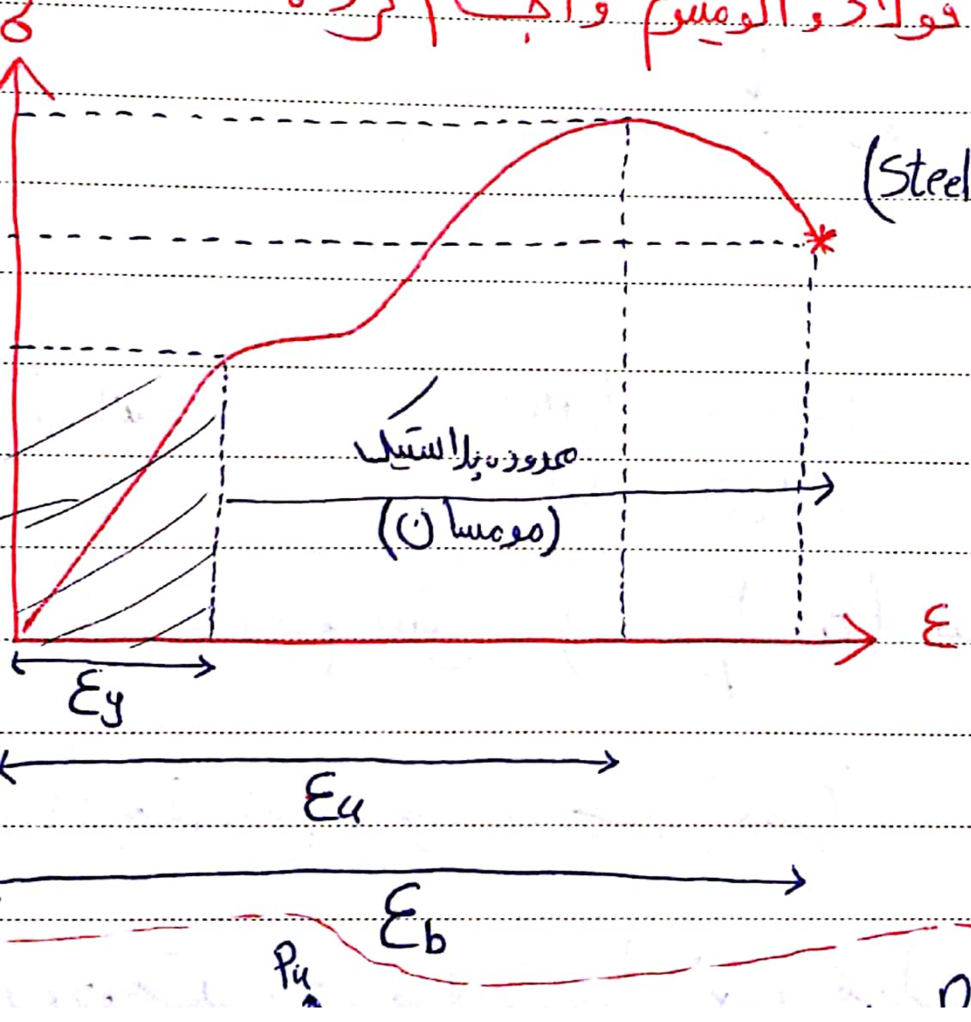
$$\varepsilon \text{ کرنش } = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

عرض المان به سمت صفر نزدیک می شود



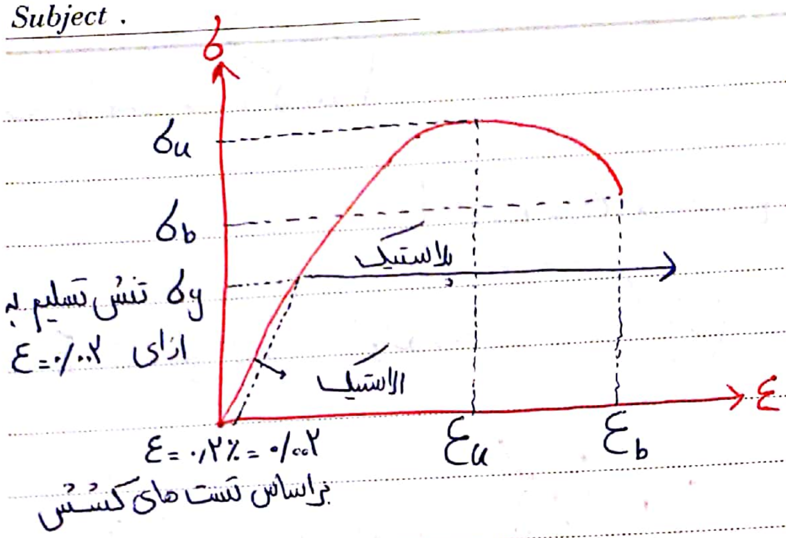
نمودار های تنش ـ کرنش فولاد، آلومینیوم و اجسام ترد:

نمودار تنش ـ کرنش فولاد (Steel)

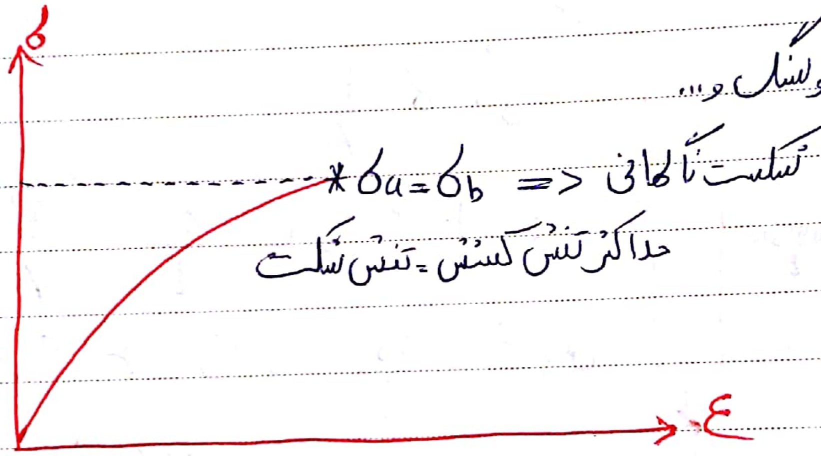


Subject .   Year.   Month.   Day.

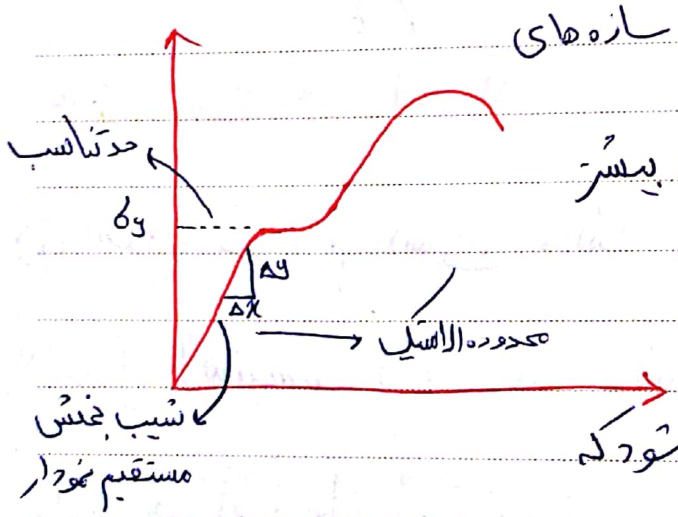
نمودار موادی مثل آلومینیوم



اجسام ترد مثل شیشه و سنگ و...



قانون یانگ: (قانون هوک) اکثریت سازه های مهندسی را طوری تصمیم می کشند که از یک مقدار کم، بیشتر دچار تغییر شکل نشود و این محدوده راست مستقیم خط نمودار σ ـ ε درنظر گرفته می شود که



در این بخش خط مستقیم نمودار تنش با کرنش متناسب است! (قانون هوک)

E را مدول کشسانی (مدول یانگ یا مدول الاستیک) گویند! واحد E همان واحد تنش است و بزرگترین مقدار تنشی که به ازای آن قانون هوک برقرار است را

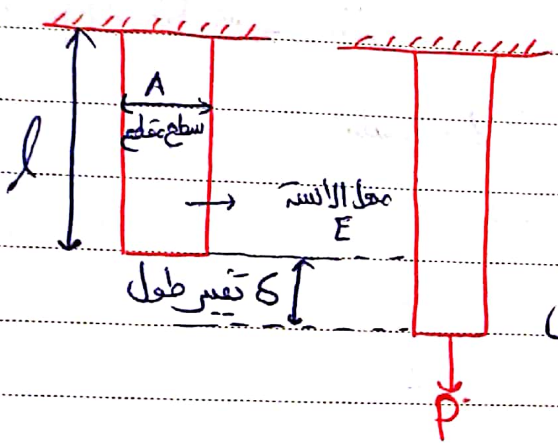
pilavaran

حد تناسب ماده گویند.

$$\text{شیب} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon} = E \Rightarrow \sigma = E.\varepsilon$$

E: از جنس تنش (واحد برحسب پاسکال)

تغییر شکل های عضوها تحت بارگذاری محوری:



$$\sigma \text{ تنش} = \frac{P}{A}$$

$$\sigma = E.\varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{A.E} \quad (I)$$

$$\varepsilon \text{ کرنش} = \frac{\delta}{l} \rightarrow \delta = \varepsilon l \quad (II)$$

$$I, II \Rightarrow \delta = \frac{Pl}{A.E}$$

۳ شرط استفاده از فرمول بالا:

۱) سطح مقطع جسم یکسان باشد

۲) مدول الاستیسیته (E) ثابت باشد (اگر نبود باید برای هر قسمتی که E یکسان دارد یک بار فرمول نوشته شود و با چند فرمول حل کنیم)

۳) نیرو فقط به ۲ سر جسم وارد شود (مهم)

pilavaran

Scanned by CamScanner

Subject .   Year.   Month.   Day.

شرایط استفاده از فرمول:

① میله همگن یا E ثابت باشد

② سطح مقطع (A) یکنواخت باشد

③ نیرو فقط به ۲ سر جسم وارد شود

نکته: اگر نیرو به نقاط دیگر میله وارد شود یا میله از بخش ها با سطوح مقطع مختلف یا جنس مختلف باشد باید آن را به بخش های کوچکتر تقسیم کنیم که شرایط لازم برای کاربرد فرمول $\delta = \frac{Pl}{A \cdot E}$ را داشته باشد.

نکته ۲: ← برای اجسام با سطوح مقطع یا جنس های مختلف:

$$\delta_{total} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

P_i: نیروی داخلی در هر بخش از جسم

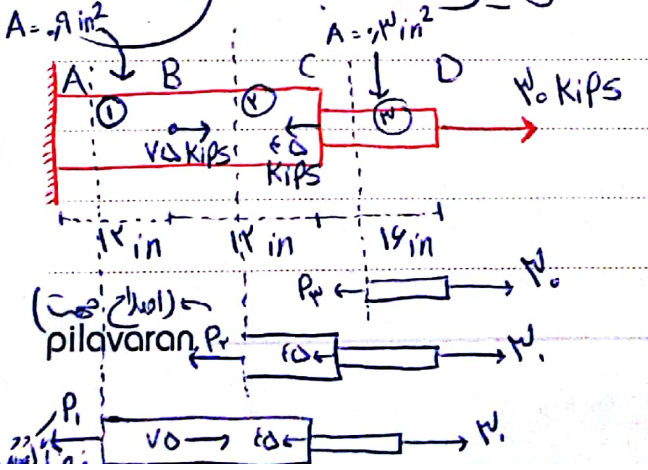
E_i: مدول الاستیسیته هر بخش

l_i: طول هر بخش

A_i: سطح مقطع هر بخش

مثال: تغییر شکل میله فولادی نشان داده شده در شکل زیر را تحت بار های داده شده تعیین کنید ($E = 29\times10^6$ psi)

$psi = \frac{1 in}{in^2}$



1 Kip = 1000 lb

Subject .

Year. Month. Day.

I (مقطع) $P_1 = +60 \text{ kips}$

II (مقطع) $P_2 = -15 \text{ kips}$

III (مقطع) $P_3 = +30 \text{ kips}$

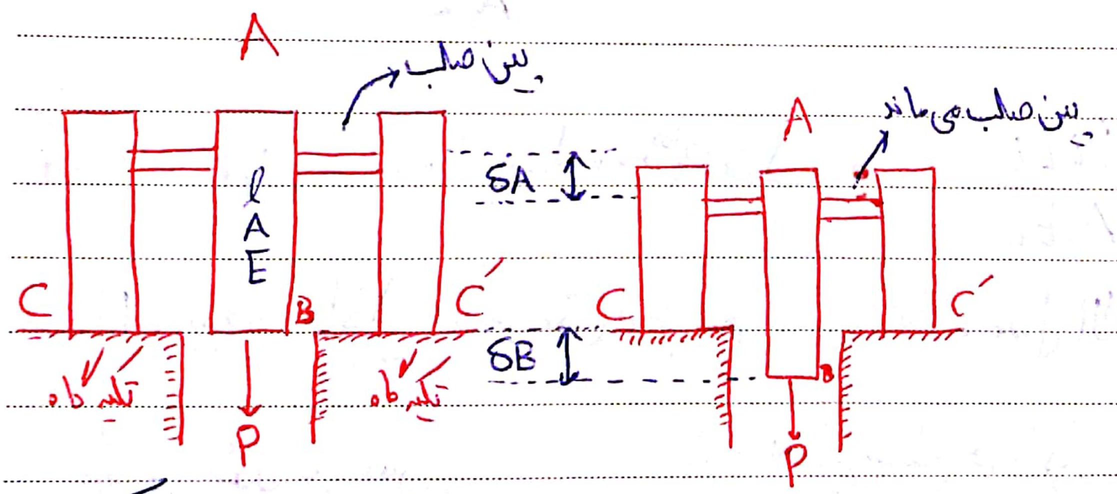
$$\delta = \frac{P\,l}{A \cdot E}$$

$$\delta_{tot} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

$$= \frac{1}{29 \times 10^6}\left(\frac{60 \times 10^3 \times 12}{0.9 \text{ in}^2} - \frac{15 \times 10^3 \times 12}{0.9 \text{ in}^2} + \frac{30 \times 10^3 \times 16 \text{ in}}{0.3 \text{ in}^2}\right)$$

$$\delta_{tot} = 75.9 \times 10^{-3} \text{ in}$$

جابجایی نسبی :



میله وسط را تحت نیروی کششی P قرار می دهیم

$$\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \frac{P\,l}{A \cdot E} \quad \text{(نسبت)}$$

$$\delta_C = \delta_C - \delta_A = -\delta_A$$
$$\delta_{C'} = \delta_{C'} - \delta_A = -\delta_A$$
} جابجایی نسبی

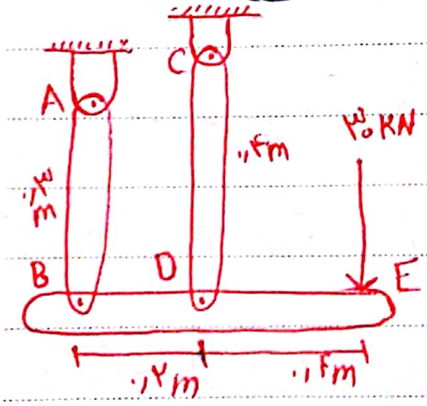
وقتی هر ۲ سر میله ای حرکت کند تغییر شکل میله با جابجایی نسبی یک سر میله نسبت به

Scanned by CamScanner

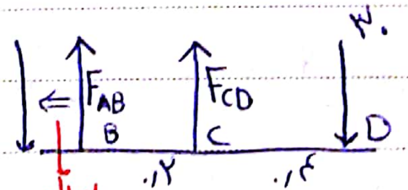
Subject . Year. Month. Day.

سر دیگرش اندازه گیری می شود! در شکل بالا دو میله الاستیک به طول l داریم که با پین صلبی مثل A به هم متصل شده اند! اگر نیروی P به نقطه B اعمال شود هر ۳ میله تغییر شکل می دهند! تغییر شکل میله AB با تفاضل $(\delta_B-\delta_A)$ یعنی جابجایی نسبی $\delta_{B/A}$ بدست می آید

مثال: میله صلب BDE توسط ۲ رابط فلزی AB و CD نگه داشته شده است AB از آلومینیوم $(E=70\ GPa)$ ساخته شده است و مساحت سطح مقطع آن $500\ mm^2$ است و CD از فولاد $(E=200\ GPa)$ ساخته شده است و مساحت سطح مقطع آن $600\ mm^2$ است! برای نیروی 30 KN نشان داده شده، تغییر مکان الف) نقطه B و ب) نقطه D و ج) نقطه E را تعیین کنید!



دیاگرام آزاد BDE



$$+\sum M_B = 0 \rightarrow -30\times 0.6 + F_{CD}\times 0.2 \rightarrow F_{CD}=90\ KN$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -30+90+F_{AB}=0 \rightarrow F_{AB}=-60$$ منفی

$$\delta_B = \frac{-60\times 10^3\ N \times 0.3\ m}{500\times 10^{-6}\ m^2 \times 70\times 10^9\ Pa\ (\frac{N}{m^2})} = -514\times 10^{-6}\ m$$

$\delta_B = -514\ \mu m$ (میکرو) فشاری

* جابجایی B به سمت بالا ↑

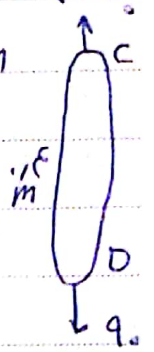
pilavaran

Scanned by CamScanner

ب)

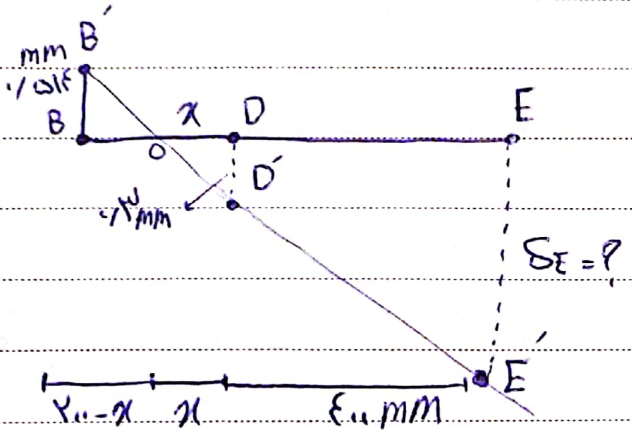
$$\delta_D = \frac{90\times10^{3} N \times 0.6 m}{600\times10^{-6} m^2 \times 200\times10^{+9} Pa \left(\frac{N}{m^2}\right)} = 300\times10^{-6} m = 300 \mu m$$

(میکرو)



جابجایی D به سمت پایین

ج)



$$\frac{0.3}{0.514} = \frac{x}{200-x} \rightarrow x = 73.7 \, mm \uparrow$$

$$\frac{x = 73.7}{400+73.7} = \frac{0.3}{\delta_E} \rightarrow \delta_E = 1.928 \, mm \downarrow$$

*** مسائل استاتیکی نامعین**

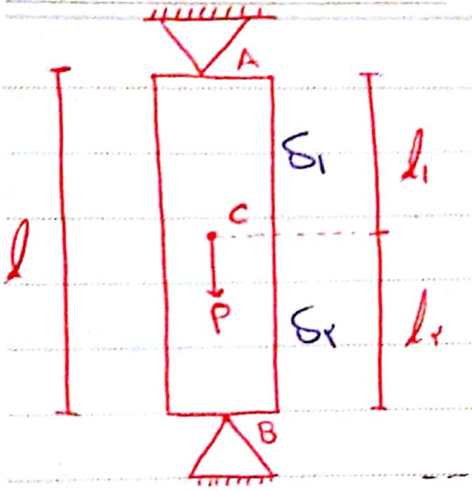
~~مثال ۵: میله AB~~

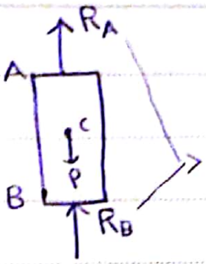
در بسیاری از مسائل نمی‌توان نیروهای داخلی را صرفاً با استفاده از استاتیک تعیین کرد! در واقع در اغلب این مسائل خود عکس العمل‌ها را که نیروی خارجی هستند نمی‌توان با رسم دیاگرام آزاد و نوشتن معادلات تعادل تعیین کرد! این معادلات را باید با روابطی شامل تغییر شکل‌های حاصل از در نظر گرفتن خواص هندسی مسئله کامل کرد! از آنجا که استاتیک برای تعیین عکس العمل‌ها کافی نیست این نوع مسائل را استاتیکی نامعین گویند!

مثال: میله AB به طول l و با سطح مقطع یکنواخت قبل از بارگذاری در A و B به تکیه‌گاه‌های صلبی متصل شده است! تنش در قسمت‌های AC و BC در اثر اعمال بار P به نقطه C چقدر است؟ P،

pilavaran

Scanned by CamScanner





نیروی تکیه گاهی

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow R_A + R_B = P$ معادله ①

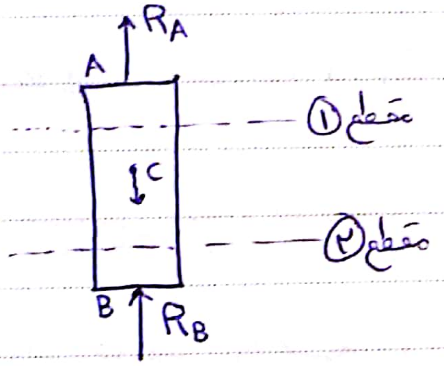
۲مجهول و ۱معلوم ⇐ استاتیکی نامعین

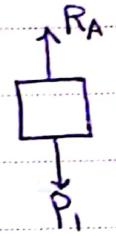
برای تعیین معادله دوم ⇐ جابجایی (تغییر مکان)

$\delta_{کل} = \delta_1 + \delta_2 = 0$

چون تیر از ۲ طرف مقید شده است

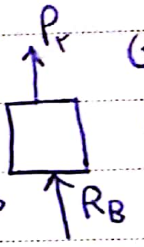
$\delta = \frac{Pl}{A.E}$ ← نیروی داخلی از مقطع





دیاگرام آزاد بالای مقطع ①

$R_A = P_1$



جهت فرضی

$P_2 = -R_B$

دیاگرام آزاد زیر مقطع ②

$$\delta_{کل} = \delta_1 + \delta_2 = 0 \longrightarrow \frac{P_1 l_1}{AE} + \frac{P_2 l_2}{AE} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta_1 + \delta_2 = P \\ R_A l_1 - R_B l_2 = 0 \end{cases}$$ معادله ②

$R_A = P - R_B$

$$(P - R_B) l_1 - R_B l_2 = 0 \longrightarrow P l_1 - R_B l_1 - R_B l_2 = 0$$

$$P l_1 - R_B \underbrace{(l_1 + l_2)}_{L} = 0 \longrightarrow P l_1 = R_B L \longrightarrow R_B = \frac{P l_1}{L}$$

$$R_A = \frac{P l_2}{L}$$

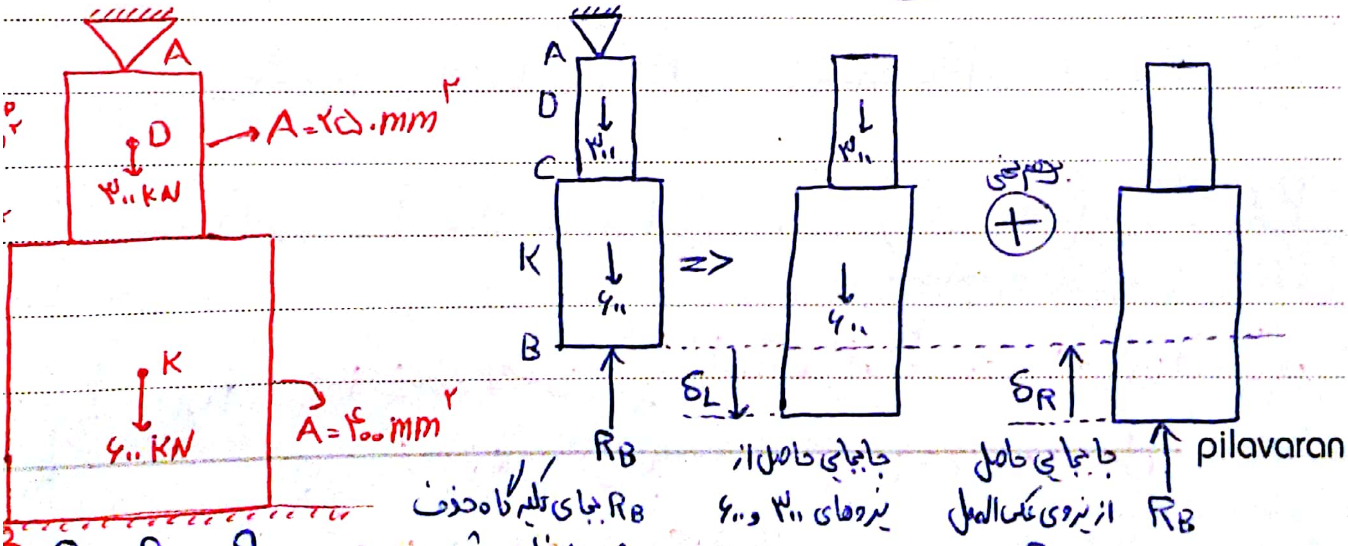
* چون فرمول $\frac{Pl}{A.E}$ برای قسمتی است که نیرو به ۲ سر آن وارد شده پس هنگام نوشتن حتی با وجود مقطع زدن هم باز طول اصلی در شکل یعنی l_1 و l_2 را می نویسیم!

pilavaran

Scanned by CamScanner

روش برهم نهی: هرگاه در سازه ای تکیه گاه ها بیش از حد (تعداد) لازم برای حفظ تعادل باشد سازه استاتیکی نامعین است! در این مسائل با استفاده از روش برهم نهی (Super Position) یکی عکس العمل ها را اضافی در نظر می گیریم و تکیه گاهش را حذف می کنیم! چون نمی توان شرایط اولیه مسئله را به دلخواه تغییر داد باید عکس العمل اضافی ای را در جواب مسئله اعمال کرد که این عکس العمل اضافی بار مجهولی می باشد که همراه بار های دیگر باید تغییر شکل های ایجاد کند که با قید های اولیه سازگار باشد! جواب مسئله از محاسبه جداگانه تغییر شکل های ناشی از بار های داده شده و عکس العمل اضافی و سپس جمع بستن یا برهم نهادن نتایج حاصل می شود!

* **مثال:** برای میله فولادی بارگذاری شده در شکل زیر عکس العمل ها در A و B را حساب کنید فرض کنید قبل از بارگذاری بین تکیه گاه ها و میله فاصله ای در کار نیست!

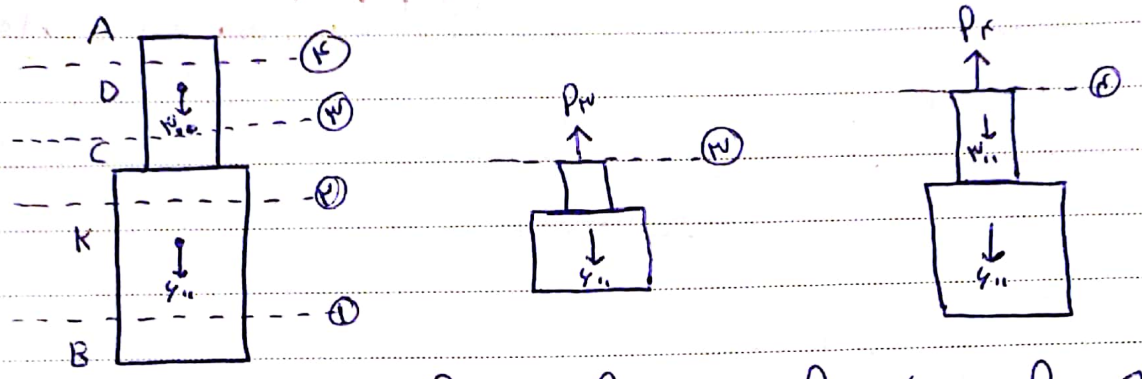


$R_A + R_B = 900$

Scanned by CamScanner

Subject . Year. Month. Day.

جابجایی کل $\delta = \delta_L + \delta_R = 0$ $|\delta_L| = |\delta_R|$

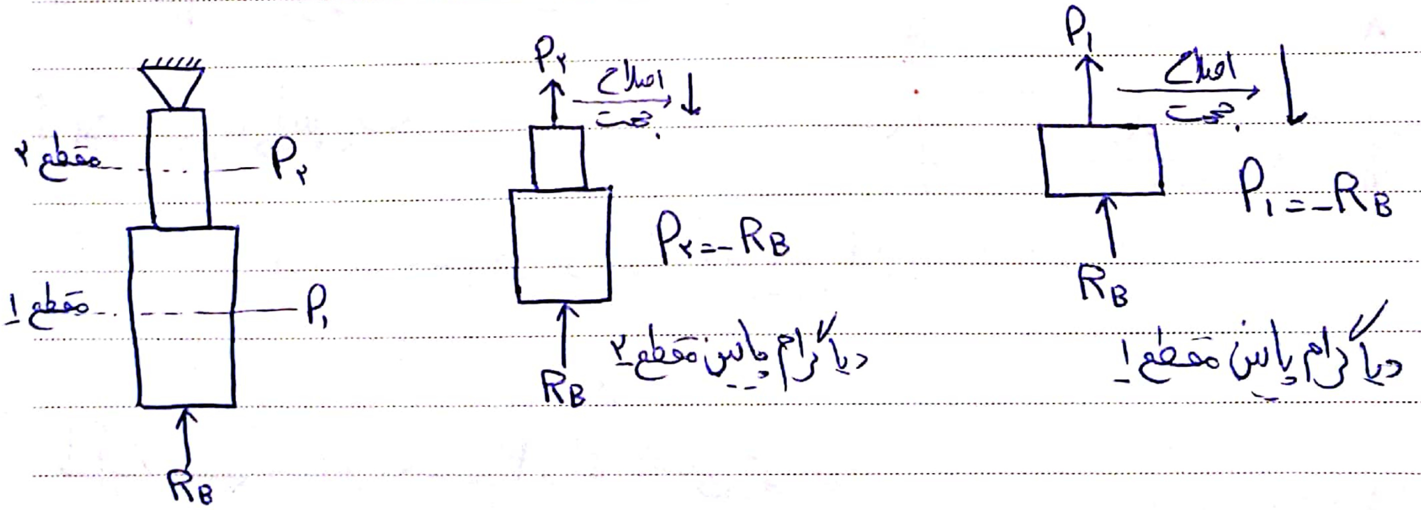


$P_1 = 0$ kN ، $P_2 = 600$ kN ، $P_3 = 600$ kN ، $P_4 = 900$ kN

$\delta_L = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 0$

$$\delta_L = \frac{1}{E}\left(0 + \frac{600\times10^{3}\,N \times 0.15\,m}{400\times10^{-6}\,m^2} + \frac{600\times10^{3} \times 0.15}{250\times10^{-6}} + \frac{900\times10^{3} \times 0.15}{250\times10^{-6}}\right)$$

$$\delta_L = \frac{1.125\times10^{9}}{E}$$



$P_2 = -R_B$ $P_1 = -R_B$

$$\delta = \frac{Pl}{A.E}$$

$$\delta_R = \delta_1 + \delta_2 \rightarrow \frac{P_1 \times 0.3}{400\times10^{-6}\times E} + \frac{P_2\times 0.3}{250\times10^{-6}\times E} = \frac{R_B \times 1.95\times10^{3}}{E}$$

pilavaran

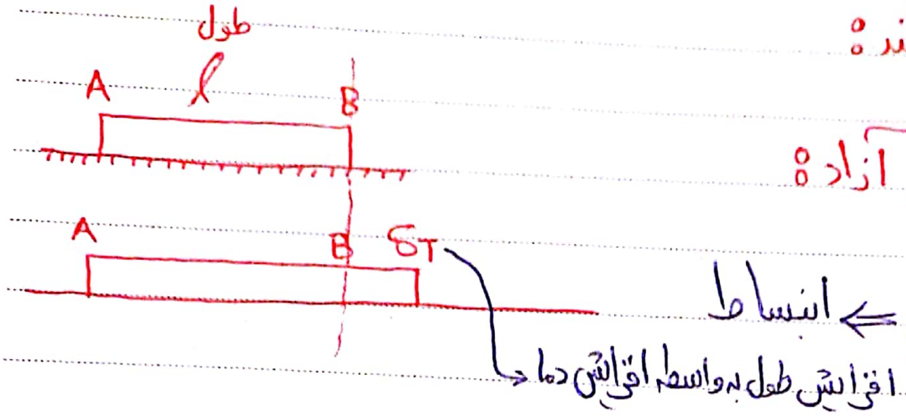
$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0 \rightarrow \frac{1.125\times10^{9}}{E} - \frac{1.95\times10^{3} R_B}{E} = 0 \rightarrow R_B = 577$$

از معادله ① $R_A + R_B = 900 \rightarrow R_A = 323$

Scanned by CamScanner

Subject.   Year.   Month.   Day.

مسائلی که در آن ها دما تغییر می کند:



حالت اول ← ۲ سر میله (تیر) آزاد:

$\Delta T \uparrow$

$\Delta T > 0 \Longrightarrow$ دما افزایش می دهیم $\Longleftarrow$ انبساط

طول نهایی $L = l + \delta_L$

ضریب انبساط حرارتی

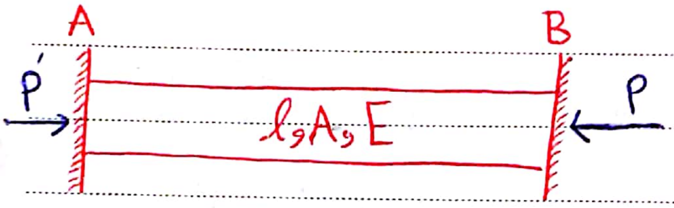
تغییر طول $\delta_L = \alpha . \Delta T . l$

$m = \frac{1}{°C} \times °C \times m$

$\alpha = \frac{1}{°C}$ ضریب انبساط حرارتی

کرنش حرارتی $\varepsilon_T = \frac{\text{تغییر طول}}{\text{طول اولیه}} = \frac{\alpha \Delta T l}{l} = \alpha \Delta T$

حالت دوم ← تیر (میله) از ۲ سر مقید (گیردار) است:



$\Delta T \uparrow \Longleftarrow$ افزایش دما

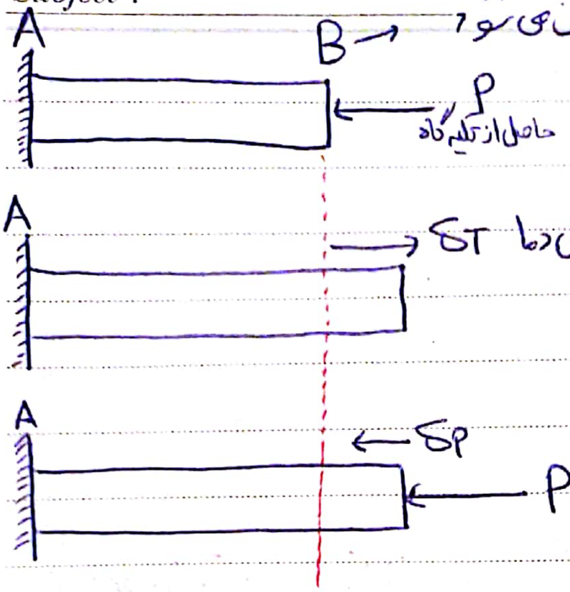
P و P' از تکیه گاه ها اعمال می شود و اجازه تغییر طول به میله را نمی دهند

$\Delta T \downarrow \Longleftarrow$ کاهش دما ← P و P' کششی می شوند

$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow$ P و P' $\longrightarrow$ ۱ معادله و ۲ مجهول و استاتیکی نامعین می شود

Scanned by CamScanner

با روش برهم نهی



$$\delta_{کل} = \delta_T + \delta_P = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_T &= \alpha \Delta T \ell \\ \delta_P &= \frac{P\ell}{A.E} \end{aligned}\right\} \delta = \alpha \Delta T \ell + \frac{P\ell}{A.E} = 0 \rightarrow P = -\alpha A.E\Delta T$$

افزایش دما ← $\Delta T > 0$ ← $P < 0$

P ← فشاری

$$\sigma = \frac{P}{A} = -\alpha.E.\Delta T \Rightarrow \sigma < 0$$
فشاری

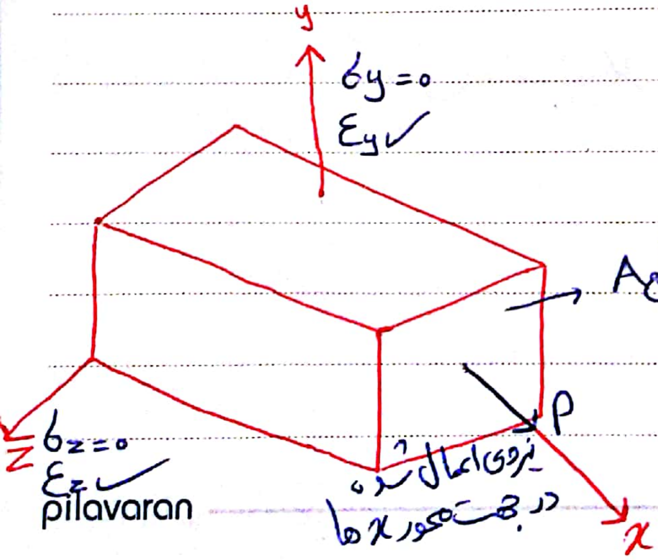
کاهش دما ← $\Delta T < 0$ ← $P > 0$

P ← کششی

$$\sigma = \frac{P}{A} = -\alpha.E.\Delta T \Rightarrow \sigma > 0$$
کششی

نسبت پواسون

بارگذاری محوری تک



pilavaran

Scanned by CamScanner

Subject .

Year. Month. Day.

$$\sigma_x = \frac{P}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{l} \quad \frac{\text{تغییر طول}}{\text{طول اولیه}}$$

در جهت محور y و z نیرو اعمال نشده است $\Rightarrow \sigma_y = \sigma_z = 0$

قانون هوک $\sigma = E\varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ و $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

ضریب پواسون ν (نیو) $= -\frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z$

جسم ایزوتروپیک (همگن و همسانگرا)

* همواره $\nu > 0$

در شکل بالا چون در جهات y و z نیرو نیست، تنش صفر می باشد و فقط تنش در جهت محور x وجود دارد! امکان دارد این شک بوجود آید که کرنش در جهت y و z هم صفر است که این طور نیست! در تمام مواد مهندسی افزایش طول حاصل از یک نیروی کششی محوری در جهت نیرو با انقباض در جهات جانبی همراه است!

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \Rightarrow \varepsilon_y = \varepsilon_z$$ در جسم ایزوتروپیک

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$ کرنش در جهت x

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = \frac{-\nu\sigma_x}{E}$$

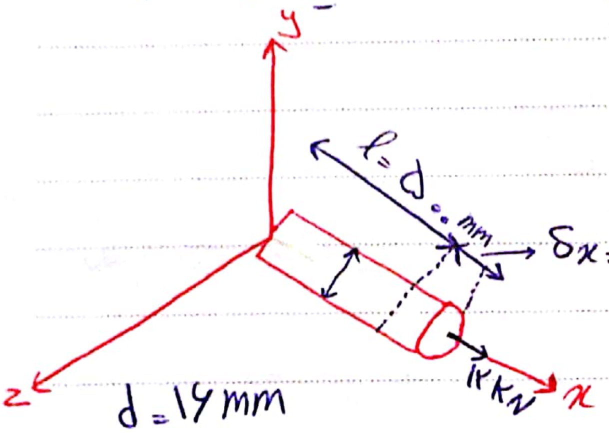
$$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = \frac{-\nu\sigma_x}{E}$$

pilavaran

Scanned by CamScanner

Subject . Year. Month. Day.

مثال: میله‌ای به طول ۵۰۰ mm و قطر ۱۶ mm که از ماده‌ای همگن و همسانگرد ساخته شده است وقتی تحت بار محوری ۱۲ KN قرار می‌گیرد افزایش طولی برابر با ۳۰۰ mm (میکرو) و کاهش قطری برابر ۲,۴ mm پیدا می‌کند! مدول کشسانی E و ضریب پواسون ν را تعیین کنید!



$\varepsilon_y < 0$ و $\varepsilon_x > 0$

$d = 16\,mm$

$\delta_y = -2.4\,mm$

$$\sigma_x = \frac{12\times10^3\,N}{\frac{\pi}{4}\times16^2\,mm^2} = 59.7\,MPa$$

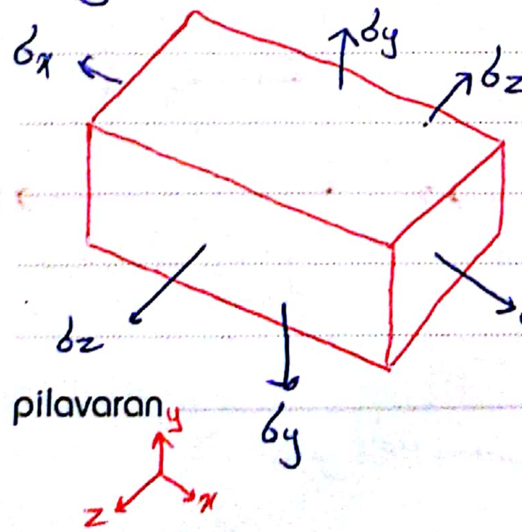
$$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{\ell} = \frac{300\,mm}{500\,mm} = 600\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-2.4}{16} = -150\times10^{-6}$$

قانون هوک $\sigma_x = E\varepsilon_x \Rightarrow E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{59.7\,MPa}{600\times10^{-6}} = 99.5\,GPa$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{-150\times10^{-6}}{600\times10^{-6}} = +0.25$$

بارگذاری چند محوری: نیرو و تنش قائم در جهت x و y و z وجود دارد اما تنش‌های برشی را اعمال نمی‌کنیم!



جسم در حال تعادل استاتیکی

pilavaran

Scanned by CamScanner

قانون تعمیم یافته هوک برای شرایط بارگذاری چندمحوری در اجسام ایزوتروپیک

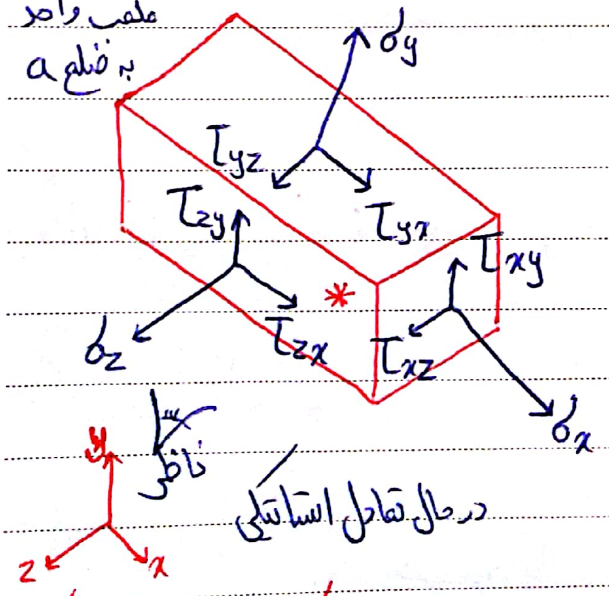
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{-\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

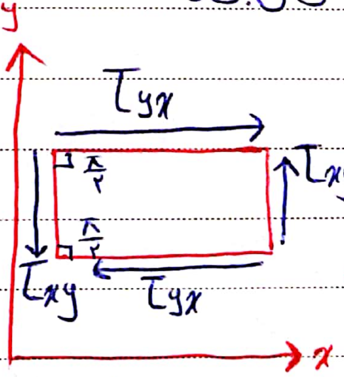
برای روابط فوق (قانون تعمیم یافته هوک) مقدار + برای تنش مشخص کننده کشش و مقدار − مشخص کننده فشار است! به همین ترتیب مقدار + برای هر مولفه کرنش نشان دهنده انبساط در آن جهت و مقدار − نشان دهنده انقباض در آن جهت می باشد!

حالت کلی تنش: هم تنش های قائم را داریم و هم تنش های برشی را (۶ مولفه)

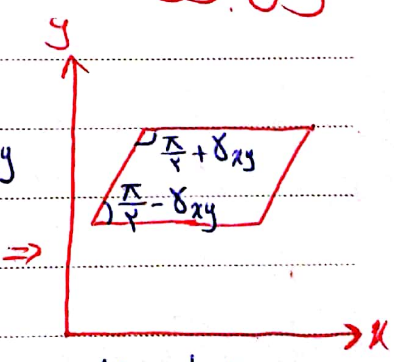


در حال تعادل استاتیکی

کرنش برشی: γ_{xy} کرنش برشی در صفحه yx



متوازی السطوح قائم الزاویه



متوازی السطوح مایل

* در شکل اولیه در پشت شکل هم قرینه نیروها وجود دارد اما بخاطر شلوغی کشیده نشده.

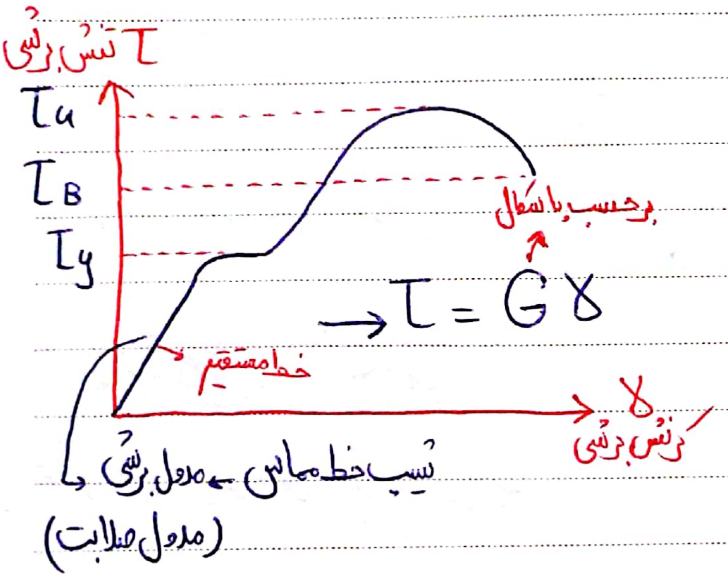
γ: تغییر زاویه نسبت به حالت اولیه قائم

pilavaran
Scanned by CamScanner

قرار داده:

اگر زاویه کم شود ⟵ $\gamma > 0$

اگر زاویه زیاد شود ⟵ $\gamma < 0$



تقریبا:

$$\tau_y \simeq \frac{1}{2}\sigma_y$$

$$\tau_u \simeq \frac{1}{2}\sigma_u$$

$$\tau_B \simeq \frac{1}{2}\sigma_B$$

τ_u: حداکثر تنش برشی

τ_B: تنش برشی در شکست

τ_y: تنش تسلیم برشی

برای حالت کلی تنش قانون هوک (تعمیم یافته) در اجسام ایزوتروپیک (قائم و برشی):

کرنش قائم:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = -\dfrac{\nu\sigma_x}{E} + \dfrac{\sigma_y}{E} - \dfrac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z = -\dfrac{\nu\sigma_x}{E} - \dfrac{\nu\sigma_y}{E} + \dfrac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

کرنش برشی:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} = \dfrac{\tau_{zx}}{G} \end{cases}$$

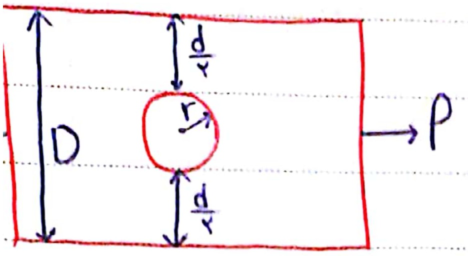
رابطه بین ν و E و G ⟹ $\dfrac{E}{2G} = 1+\nu$

pilavaran

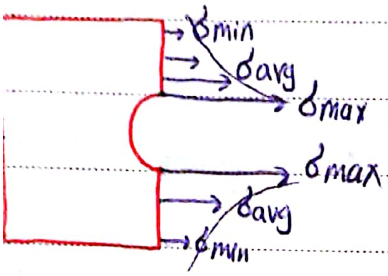
Scanned by CamScanner

تمرکز تنش:

صفحه تحت بارگذاری محوری دارای

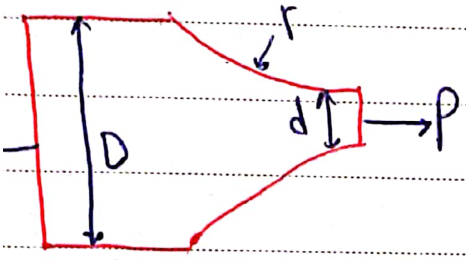


تنش ها می توانند در نزدیکی نقاط اعمال بارهای متمرکز یا در عضو های شامل ناپیوستگی هایی مثل سوراخ یا تغییر ناگهانی در سطح مقطع



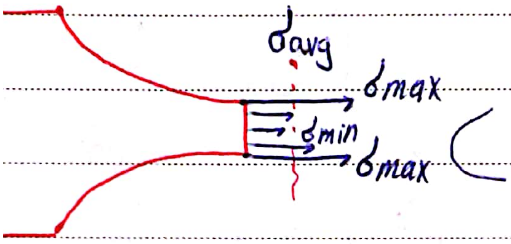
$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{avg}}$$

در نزدیکی ناپیوستگی آنها تنش های موضعی بزرگی داریم. نسبت σ_{max} به σ_{avg} که در مقطع بحرانی (باریک ترین مقطع) از ناپیوستگی محاسبه می شود را ضریب تمرکز تنش $K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{avg}}$ گویند.



میله تحت دارای فیلت (گرده) تحت

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{avg}}$$



مقطع بحرانی: سطح مقطع که تنش نسبت به سایر قسمت های حجم کمتر

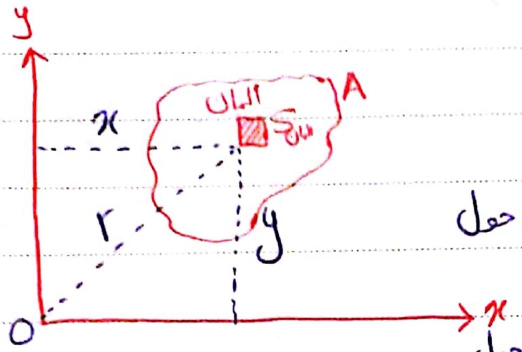
۲-۵-۹-۱۱-۱۲-۱۹-۲۲-۲۸-۳۲-۳۶-۴۲-۴۵-۴۶-۴۸-۵۱-۵۹
۷۰-۷۲-۷۷-۸۳-۸۸-۹۱-۱۵۴-۱۵۵

Subject .   Year.   Month.   Day.

فصل سوم

پیچش :

ممان اینرسی : (گشتاور سطح)



ممان اینرسی حول محور x: $I_x = \int_A y^2 \, dA$

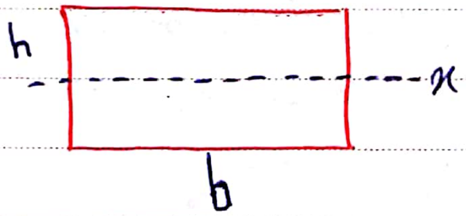
واحد: mm^4 یا m^4 یا cm^4

ممان اینرسی حول محور y: $I_y = \int_A x^2 \, dA$

ممان اینرسی قطبی (ممان قطبی): $J = \int_A r^2 \, dA \Rightarrow J = \int_A (x^2+y^2)\, dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$

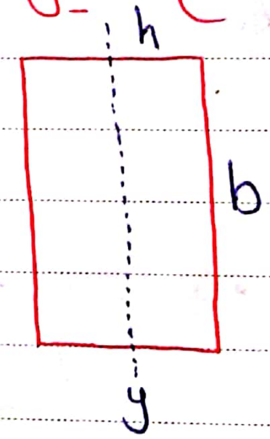
$\Rightarrow J = I_x + I_y$

ممان اینرسی برای مقطع مستطیل و دایره :



$I_x = \frac{1}{12} b h^3$

محور x محور افقی گذرنده از مرکز سطح مستطیل

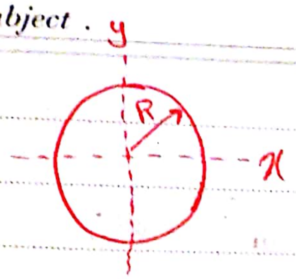


$I_y = \frac{1}{12} h b^3$

محور y محور عمودی گذرنده از مرکز سطح مستطیل

$$I_{\text{مستطیل}} = \frac{\text{ضلع موازی با محور} \times (\text{ضلع عمود بر محور})^3}{12}$$

pilavaran



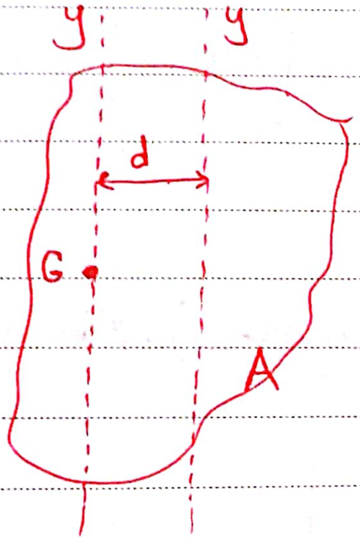
ممان اینرسی قطبی دایره $J = \frac{\pi}{2} R^4$

$J = I_x + I_y$ دایره $I_x = I_y$

$J = 2 I_x = 2 I_y$

$I_x = \frac{\pi}{4} R^4$ یا $I_y = \frac{\pi}{4} R^4$

قضیه محورهای موازی:



G: مرکز سطح شکل

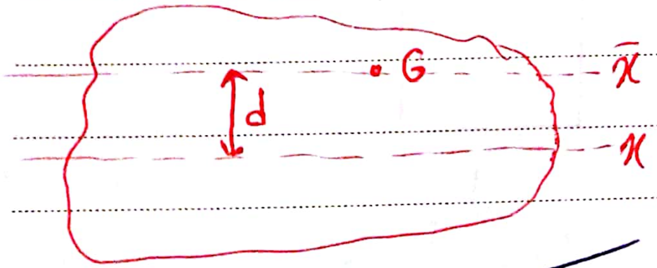
$\bar{y}$: محور عمودی گذرنده از مرکز سطح

y: محور موازی به موازات $\bar{y}$

$\bar{x}$: محور گذرنده از مرکز سطح

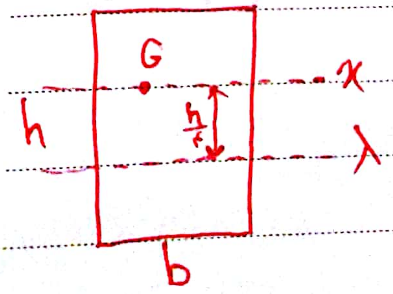
x: محور به موازات $\bar{x}$

$I_y = \bar{I}_y + A.d^2$



$I_x = \bar{I}_x + A.d^2$

* با استفاده از قضیه محورهای موازی، I_λ را محاسبه کنید!



$I_\lambda = \frac{1}{12} bh + b.h.\frac{h^2}{16}$

$= bh^3 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right) = \frac{7}{48} bh^3$

pilavaran

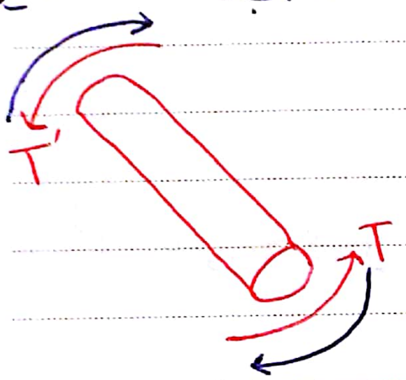
Scanned by CamScanner

Subject . Year. Month. Day.

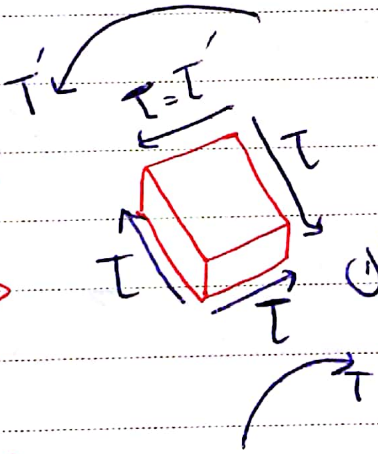
میل گردان (torsion bar)

در فصل پیچش عضوهای سازه و قطعات ماشین را تحت اثر پیچش بررسی می کنیم!

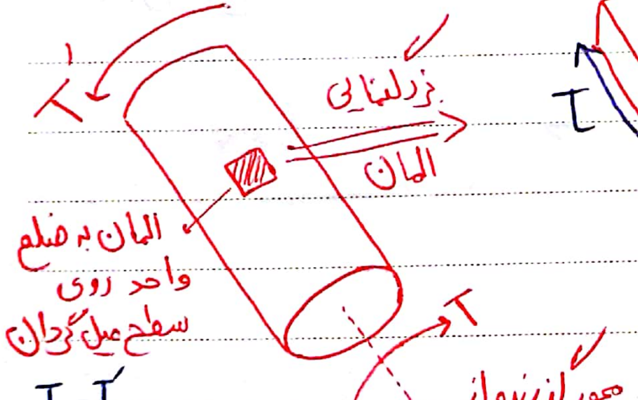
هدف بررسی تنش و کرنش در عضوهای با سطح مقطع دایره تحت اثر کوپل های پیچشی (گشتاور های پیچشی) است! این گشتاور های پیچشی برابر و در خلاف یکدیگرند



$T = T'$ * با جهت آبی و با جهت قرمز درست است



اگر به میل گردان گشتاور های پیچشی اعمال کنیم روی وجوه عمود بر محور میل گردان تنش های برشی ایجاد می شود! اما شرایط تعادل ایجاب می کند که روی وجوه تشکیل شده از ۲ صفحه به موازات محور میل گردان هم تنش های برشی برابر داشته باشیم



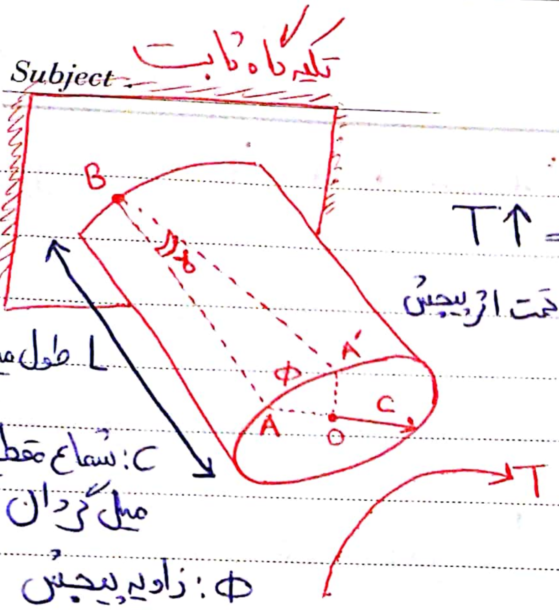
$\tau = \tau'$ و $T = T'$

Scanned by CamScanner

Subject

Year. Month. Day.

میل گردان تحت پیچش



L: طول میل گردان

C: شعاع مقطع میل گردان

Φ: زاویه پیچش

γ: کرنش برشی

$T\uparrow \Rightarrow \uparrow\Phi$

کرنش برشی تحت از پیچش $\gamma = \dfrac{\rho\Phi}{L}$ ①

$\gamma_{max} = \dfrac{C\Phi}{L}$ ②

$\dfrac{①}{②} \rightarrow \dfrac{\gamma}{\gamma_{max}} = \dfrac{\rho}{C}$

$\longrightarrow \gamma = \dfrac{\rho}{C}\gamma_{max}$

ρ: متغیر شعاعی میل گردان $\leftarrow$ $0 < \rho \leqslant C$

شعاع میل گردان

طرفین ضرب در G مدول برشی $\leftarrow$ $G\gamma = \dfrac{\rho}{C} G\gamma_{max}$

$\tau = G\gamma \Rightarrow \tau = \underbrace{\dfrac{\rho}{C}\gamma_{max} \cdot G}_{?} \rightarrow \tau = \dfrac{\rho}{C}\tau_{max}$

$\tau = \dfrac{T\rho}{J}$ $\quad 0 < \rho \leqslant C$

$\tau_{max} = \dfrac{TC}{J}$

τ: تنش برشی حاصل از پیچش

T: گشتاور پیچشی

J: ممان قطبی

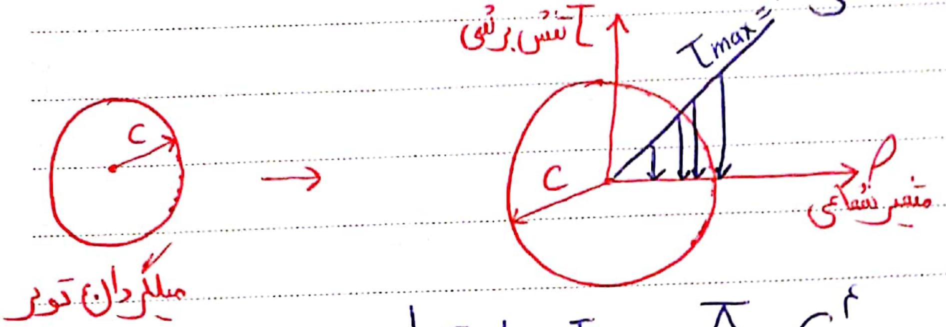
ρ: متغیر شعاعی

pilavaran

Scanned by CamScanner

Subject .   Year.   Month.   Day.

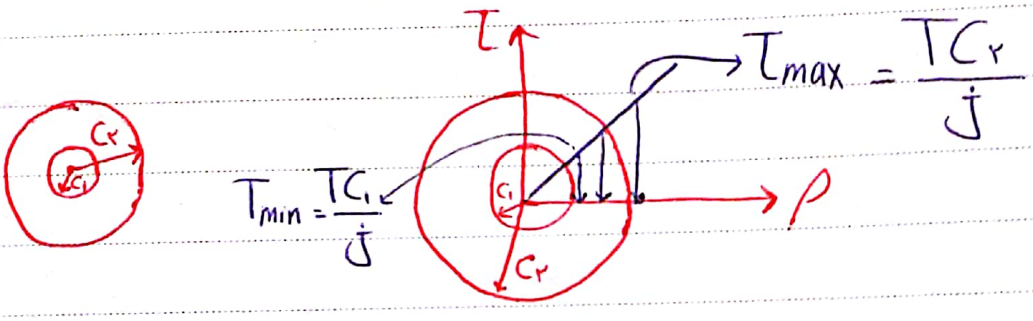
توزیع تنش برشی در میلگردان ها تحت اثر گشتاور پیچشی:



$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

$y = ax$

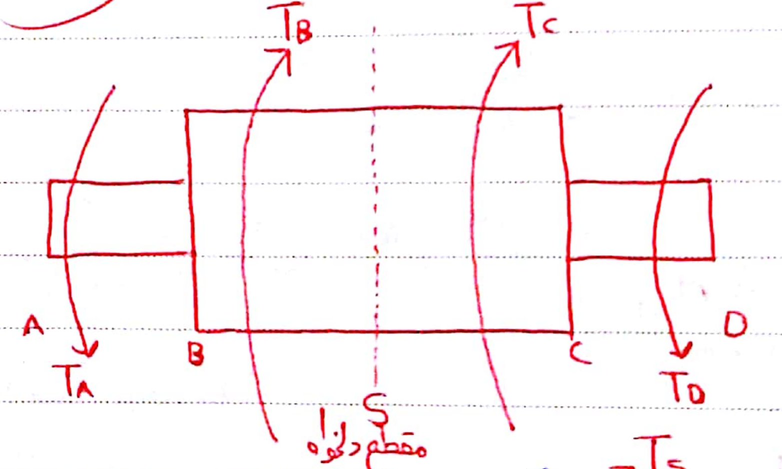
J ممان قطبی $= \frac{\pi}{2} C^4$



$$\frac{\tau_{min}}{\tau_{max}} = \frac{C_1}{C_2}$$

J ممان قطبی $= \frac{\pi}{2} C_2^4 - \frac{\pi}{2} C_1^4 = \frac{\pi}{2}(C_2^4 - C_1^4)$

توزیع تنش برشی در میلگردان با سطح مقطع متفاوت و تحت اثر گشتاور های مختلف:

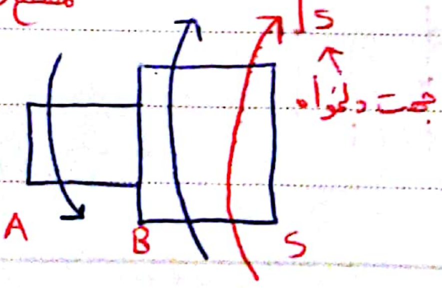


T_s بدست می آید

$$\sum T = 0 \rightarrow T_A - T_B - T_s = 0$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{TC}{J} \Rightarrow \tau_s = \frac{T_s \times C_s}{J_s}$$

دیاگرام آزاد تحت مقطع

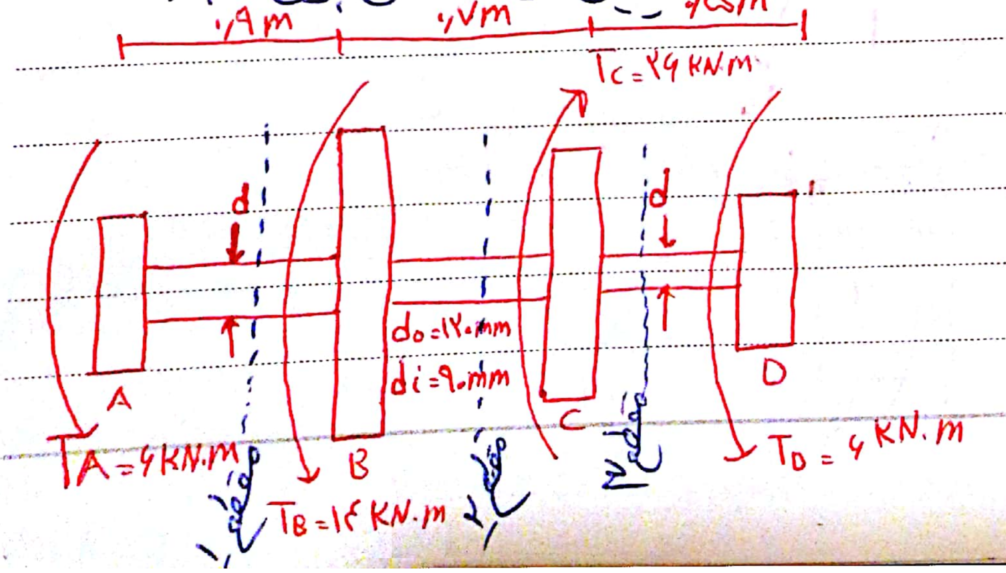


pilavaran

Scanned by CamScanner

نکته: فرمول پیچش را برای سطح مقطع متغیر که گشتاورهایی به نقاطی غیر از ۲ سر آن وارد می‌شود را هم می‌توان بکار برد. توزیع تنش برشی در یک سطح مقطع دلخواه از رابطه $\tau = \frac{TC}{J}$ بدست می‌آید که در آن J ممان قطبی در مقطع S و T بیانگر گشتاور داخلی در مقطع S است. برای بدست آوردن مقدار این گشتاور (T_S) دیاگرام آزاد قسمتی از میلگردان را که در یک طرف مقطع قرار دارد رسم می‌کنیم و مجموع گشتاورها را برابر صفر قرار می‌دهیم.

مثال: میلگردان BC توخالی است و قطرهای داخلی و خارجی آن به ترتیب برابر با ۹۰mm و ۱۲۰mm است. میلگردان‌های AB و CD توپر هستند و قطر آنها برابر d است. برای بارگذاری نشان داده شده در شکل زیر، max و min تنش برشی در میلگردان BC را بدست آورید و ب) قطر d لازم برای میلگردان‌های AB و CD را در صورتی تعیین کنید که تنش برشی مجاز در آنجا 65 MPa باشد.

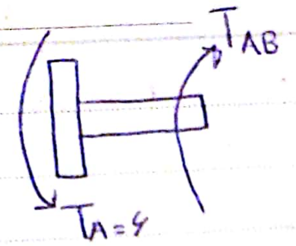


قطر خارجی: do
قطر داخلی: di

pilavaran

Scanned by CamScanner

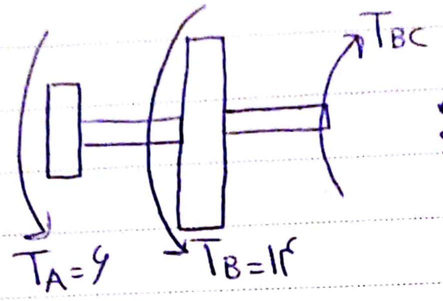
مقطع ۱



$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum T = 0 \rightarrow 6 - T_{AB} = 0$

$T_{AB} = 6\ kN.m$

مقطع ۲



$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \sum T = 0 \rightarrow 6 + 14 - T_{BC} = 0$

$T_{BC} = 20\ kN.m$

$$\tau_{max} = \frac{T_{BC} \times C}{J} \qquad C = C_2 = 0.06\,m$$

$$J = \frac{\pi}{2}\left(C_2^4 - C_1^4\right) = \frac{\pi}{2}\left(0.06^4 - 0.045^4\right) = 13.92 \times 10^{-6}\ m^4$$

$$\tau_{max_{BC}} = \frac{20 \times 10^3\ N.m \times 0.06\,m}{13.92 \times 10^{-6}\ m^4} = 86.2 \times 10^6\ \frac{N}{m^2} = 86.2\ MPa$$

$$\frac{\tau_{min}}{\tau_{max}} = \frac{C_1}{C_2} \rightarrow \frac{\tau_{min}}{86.2} = \frac{0.045}{0.06} \rightarrow \tau_{min} = 64.7\ MPa$$

{ سمت چپ مقطع ۱ $\rightarrow T_{AB} = 6\ kN.m$

سمت راست مقطع ۳ $\rightarrow T_{CD} = 6\ kN.m$

$$65 \times 10^6\ Pa = \frac{6 \times 10^3 \times C}{\frac{\pi}{2} C^4}$$

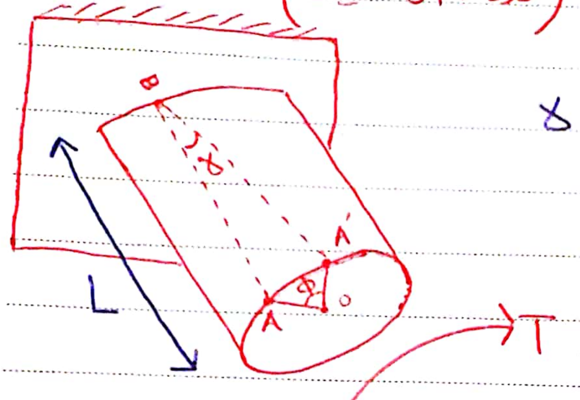
$$65 \times 10^6 \times \frac{\pi}{2} C^4 = 6 \times 10^3 \times C \Rightarrow C = 38.9 \times 10^{-3}\ m = 38.9\ mm$$

$$d = 2C \rightarrow 2 \times 38.9 = 77.8\ mm$$

Scanned by CamScanner

Subject . Year. Month. Day.

زاویه پیچش در میلگردان تحت اثر گشتاور پیچش (محدوده الاستیک):



$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma &= \frac{\rho\phi}{L}\\ \gamma_{max} &= \frac{c\phi}{L}\end{aligned}\right\} \frac{\gamma}{\gamma_{max}} = \frac{\rho}{c}$$

ϕ : زاویه پیچش (Rad)

γ : کرنش برشی

$$\longrightarrow \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$$

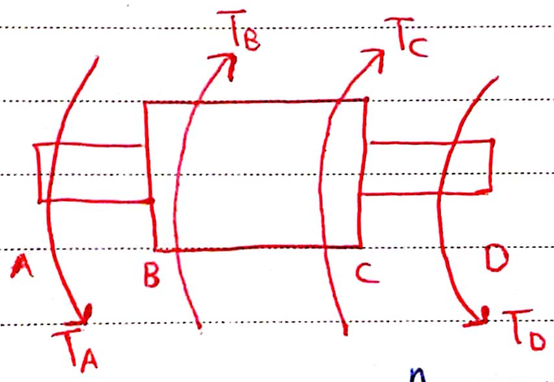
① $\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L}$

$\tau = G\gamma$ (τ: تنش برشی، G: مدول صلابت، γ: کرنش برشی)

② $\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{Tc}{JG}$

① = ② $\rightarrow \frac{c\phi}{L} = \frac{Tc}{JG} \Longrightarrow \phi = \frac{TL}{GJ}$

زاویه پیچش در میلگردان با مقاطع مختلف و تحت اثر گشتاورهای پیچشی مختلف:



$$\phi = \frac{TL}{GJ}$$ (زاویه پیچش)

$$\phi_{total} = \phi_1 + \phi_2 + \dots$$

$$\phi_{total} = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$

* رابطه $\phi = \frac{TL}{JG}$ را فقط در صورتی می‌توان برای محاسبه زاویه پیچش بکار برد که میلگردان همگن باشد (G ثابت) و سطح مقطع یکنواخت باشد.

pilavaran

Scanned by CamScanner

Subject . Year. Month. Day.

گشتاور فقط به ۲ سر آن اعمال شود! اگر گشتاور به جاهایی غیر ۲ سر وارد شود یا اگر سطوح مقطع متفاوت باشد و یا جنس میلگردان متفاوت باشد باید آن را به قسمت های کوچکتر تقسیم کنیم که هر قسمت شرایط استفاده از فرمول را بگیرد!

میلگردان های استاتیکی نامعین:

مسائلی وجود دارند که در آنها نمی توان گشتاورهای داخلی را تنها با استفاده از استاتیک تعیین کرد! در چنین مواردی خود گشتاورهای خارجی یعنی گشتاورهای حاصل از تکیه گاه ها بر میل گردان با استفاده از دیاگرام آزاد تعیین کرد! در چنین مواردی معادلات تعادل را باید با روابطی شامل تغییر شکل های هندسی میل گردان تکمیل کرد! چون استاتیک برای تعیین گشتاورهای داخلی و خارجی کافی نیست این گونه میل گردان ها را استاتیکی نامعین می نامند!

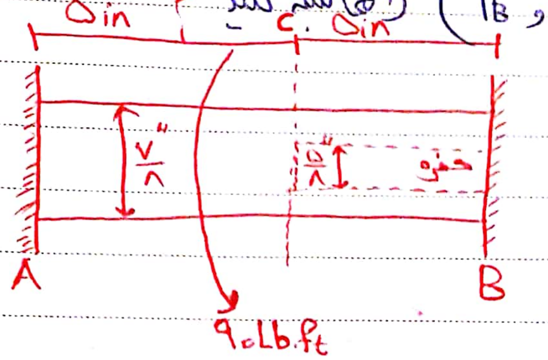
مثال: میلگردان AB متشکل از یک استوانه فولادی به طول $10\,in$ و به قطر $\frac{7}{8}\,in$ است که حفره ای به طول $5\,in$ و به قطر $\frac{5}{8}\,in$ از سمت B در آن ایجاد شده است! AB از هر ۲ طرف به تکیه گاه های ثابتی متصل شده و گشتاوری به اندازه $90\,lb.ft$ به وسط آن اعمال می شود!

pilavaran

Scanned by CamScanner

Subject .   Year.   Month.   Day.

گشتاور وارد بر میله از سوی هر تکیه گاه (T_A و T_B) را حساب کنید

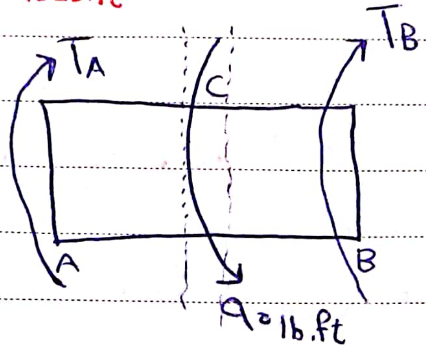


$\sum T = 0 \Longrightarrow T_A + T_B = 90\ lb.ft$

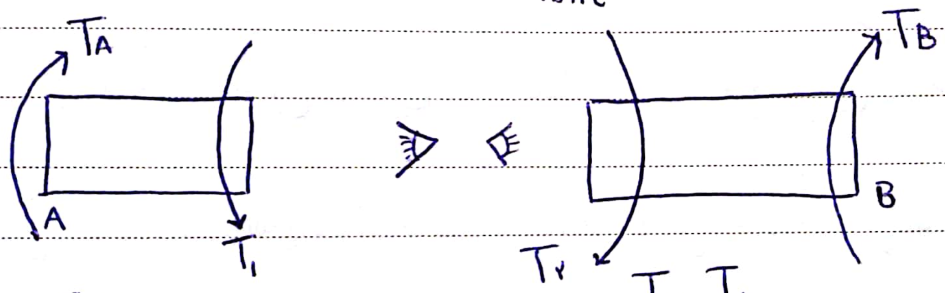
۱ معادله و ۲ مجهول ⇐ نامعین استاتیکی

زاویه پیچش نداریم چون هر ۲ سر مقید شده است $\Phi_{کل} = 0$

دیاگرام آزاد میله BC



$\Phi_{کل} = \Phi_1 + \Phi_2 = 0$



$T_1 = T_A$ $\qquad$ $T_2 = T_B$

از دید ناظر T_1 و T_2 در خلاف جهت هستند پس Φ_1 و Φ_2 مختلف العلامت هستند

$$\Phi_1 = \frac{T_1 L_1}{G_1 J_1} = \frac{T_A L_1}{G_1 J_1}$$

$$\Phi_2 = \frac{T_2 L_2}{G_2 J_2} = \frac{T_B L_2}{G_2 J_2}$$

$$\frac{T_A L_1}{G_1 J_1} - \frac{T_B L_2}{G_2 J_2} = 0$$

$$\frac{T_A L_1}{G_1 J_1} = \frac{T_B L_2}{G_2 J_2} \longrightarrow \frac{T_A}{J_1} = \frac{T_B}{J_2}$$

pilavaran

Scanned by CamScanner

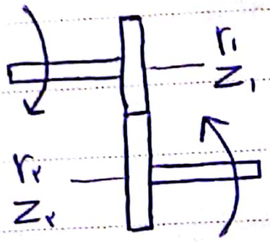
$$J_1 = \frac{\pi}{۲}\left(\frac{۷}{۱۶}\right)^۴ = ۵۷,۶ \times ۱۰^{-۳}\ in^۴$$

$$J_۲ = \frac{\pi}{۲}\left(\left(\frac{۷}{۱۶}\right)^۴ - \left(\frac{۵}{۱۶}\right)^۴\right) = ۴۲,۶ \times ۱۰^{-۳}\ in^۴$$

$$\frac{T_A}{۵۷,۶\times۱۰^{-۳}} = \frac{T_B}{۴۲,۶\times۱۰^{-۳}} \Rightarrow \boxed{T_B = ۰,۷۴\ T_A} \quad (۲)$$

$$T_A = ۵۱,۷\ lb.ft \qquad T_B = ۳۸,۳\ lb.ft$$

چرخ دنده ها :



توان $P = T\,\omega$ (امگا)

T ← گشتاور ؛ ω ← سرعت دوران زاویه‌ای

$$\omega = ۲\pi n \qquad \left(rpm = \frac{rev}{min}\right)$$

$$\omega = \frac{۲\pi n}{۶۰}\ \left(\frac{rad}{s}\right) \quad \text{یا} \quad \omega = ۲\pi f$$

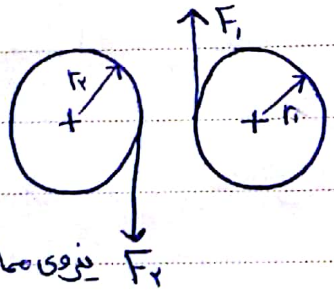
f: فرکانس کاری (دوران) $[f] = Hz$ یا $\frac{۱}{s}$

r: شعاع چرخ دنده

Z: تعداد دندانه های دور چرخ دنده

فرض: اتلاف بین چرخ دنده ها وجود ندارد ←

$$\left.\begin{aligned} P_۱ &= P_۲ \\ T_۱\omega_۱ &= T_۲\omega_۲ \end{aligned}\right\} \quad \frac{T_۱}{T_۲} = \frac{\omega_۱}{\omega_۲} = \frac{n_۲}{n_۱} \ *$$



$F_۱ = F_۲$ نیروی عمل و عکس العمل

گشتاور $T_۱ = r_۱F_۱ = r_۱F$ و $T_۲ = r_۲F_۲ = r_۲F$

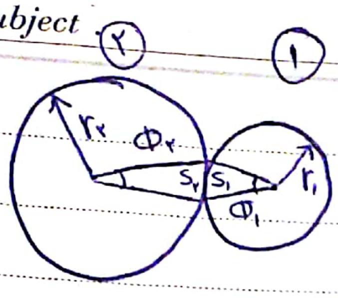
$$\frac{T_۱}{T_۲} = \frac{r_۱F_۱}{r_۲F_۲} = \frac{r_۱}{r_۲}$$

pilavaran

*ادامه فرمول
$$\frac{n_۲}{n_۱} = \frac{r_۱}{r_۲} = \frac{Z_۱}{Z_۲} = \frac{\Phi_۲}{\Phi_۱}$$

Scanned by CamScanner

Subject   Year.   Month.   Day.



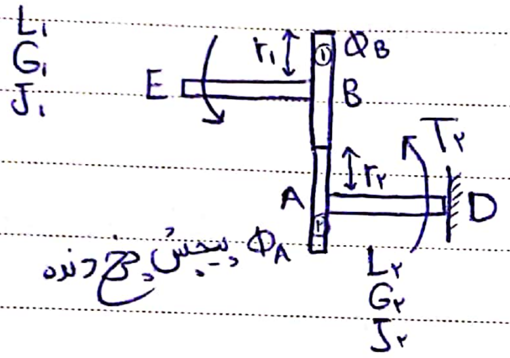
S: طول قوس طی شده توسط دنده های چرخ دنده درگیر

$S_1 = S_2$ $S_1 = r_1 \Phi_1$

زاویه پیچش →

$S_2 = r_2 \Phi_2 \Rightarrow r_1 \Phi_1 = r_2 \Phi_2$

زاویه پیچش نسبی:



$\Phi_{E/B} = \Phi_{EB} = \Phi_E - \Phi_B$

$\to \Phi_E = \Phi_{EB} + \Phi_B$

$\Phi_{EB} = \frac{T_1 L_1}{G_1 J_1}$ $\Phi_B = ?$

طول قوس طی شده $S_1 = S_2 \Rightarrow r_1 \Phi_B = r_2 \Phi_A$

$\to \frac{r_1}{r_2} = \frac{\Phi_A}{\Phi_B} \Rightarrow \Phi_B = \frac{r_2}{r_1} \Phi_A = \frac{r_2}{r_1} \left(\frac{T_2 L_1}{G_2 J_2} \right)$

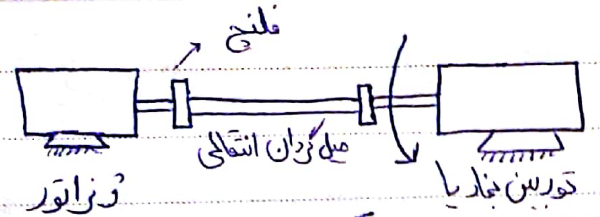
اعمال و اندازه گیری گشتاور T_1 (گشتاور اعمالی بر روی چرخ دنده محرک) آسان تر از بدست آوردن گشتاور چرخ دنده محرک T_2 است! به همین خاطر در رابطه نهایی بهتره براساس گشتاور T_1 یا همان گشتاور محرک محاسبه شود

$\frac{T_1}{T_2} = \frac{r_1}{r_2} \to T_2 = \left(\frac{r_2}{r_1} \right) T_1$ (*)

$\Phi_E = \frac{T_1 L_1}{G_1 J_1} + \frac{r_2}{r_1} \left(\frac{T_2 L_2}{G_2 J_2} \right) \to \Phi_E = \frac{T_1 L_1}{G_1 J_1} + \frac{T_1 L_2}{G_2 J_2} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2$

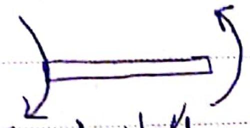
Scanned by CamScanner

Subject . Year. Month. Day.



طراحی میل‌گردان های انتقال :

در طراحی میل‌گردان‌های انتقال، ۲ نکته را باید مدنظر قرار داد ! یکی توان انتقالی و دیگری سرعت چرخش میلگردان است ! نقش طراح این است که متریال و ابعاد سطح مقطع میل‌گردان را طوری انتخاب کند که هنگام انتقال توان لازم در سرعت مشخص شده، تنش برشی از حداکثر مقدار مجاز آن تجاوز نکند !



$P = T\omega$

توان انتقال داده شده توسط میل‌گردان تحت اثر پیچش

$\omega = 2\pi f$ سرعت دورانی زاویه‌ای

$\Rightarrow P = 2\pi f T$

$\longrightarrow T = \frac{P}{2\pi f}$

$[T] : N.m$

$[f] : s^{-1} = Hz$ $\quad [P] : watt = J/s = \frac{N.m}{s}$

$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} \longrightarrow \frac{T}{\tau_{max}} = \frac{J}{c}$

(τ_{max}: تنش برشی ماکسیمم)

$J/c \Rightarrow$ حداقل (min) $\Rightarrow$ مشخص کننده سطح مقطع میل‌گردان

$\frac{J}{c} = \frac{\frac{\pi}{2} c^4}{c} = \frac{\pi}{2} c^3$ میل‌گردان توپر

$\frac{J}{c} = \frac{\frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4)}{c_2}$ میل‌گردان توخالی

c_2 ← شعاع خارجی

pilavaran

Scanned by CamScanner

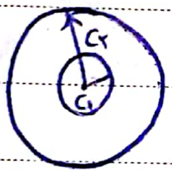
Subject .

Year. Month. Day.

تبدیل واحد: $1rpm = \frac{1}{60} s^{-1} = \frac{1}{60} Hz$ و $1hp = 550 \frac{ft.lb}{s} = 6600 \frac{in.lb}{s}$

* پس از بدست آوردن گشتاور T که به میل گردان وارد می شود و انتخاب جنس میل گردان طرح مقادیر T و حداکثر تنش برشی مجاز را در فرمول $\tau_{max} = \frac{TC}{J}$ قرار می دهد. از حل این معادله با استفاده از نسبت $\frac{J}{C}$ ابعاد سطح مقطع میل گردان بدست می آید

مثال: میل گردانی متشکل از لوله فولادی به قطر خارجی 50 mm را انتقال توانی را بار 100 kW در فرکانس چرخش 20 Hz در نظر گرفته شده است! ضخامت لوله را طوری تعیین کنید که تنش برشی مجاز از 60 MPa بیشتر نشود!



ضخامت $t = C_2 - C_1$

$$T = \frac{P}{2\pi f} \longrightarrow T = \frac{100 \times 10^3 \ \frac{N.m}{s}}{2\pi \times 20 \ \frac{1}{s}} = 795.8 \ N.m$$

$$\tau_{max} = \frac{TC}{J} \longrightarrow \frac{T}{\tau_{max}} = \frac{J}{C}$$

$$\frac{795.8 \ N.m}{60 \times 10^6 \ \frac{N}{m^2} = Pa} = \frac{\frac{\pi}{2}(0.025^4 - C_1^4)}{0.025} \longrightarrow C_1 = 20.6 \times 10^{-3} m \rightarrow C_1 = 20.6 \ mm$$

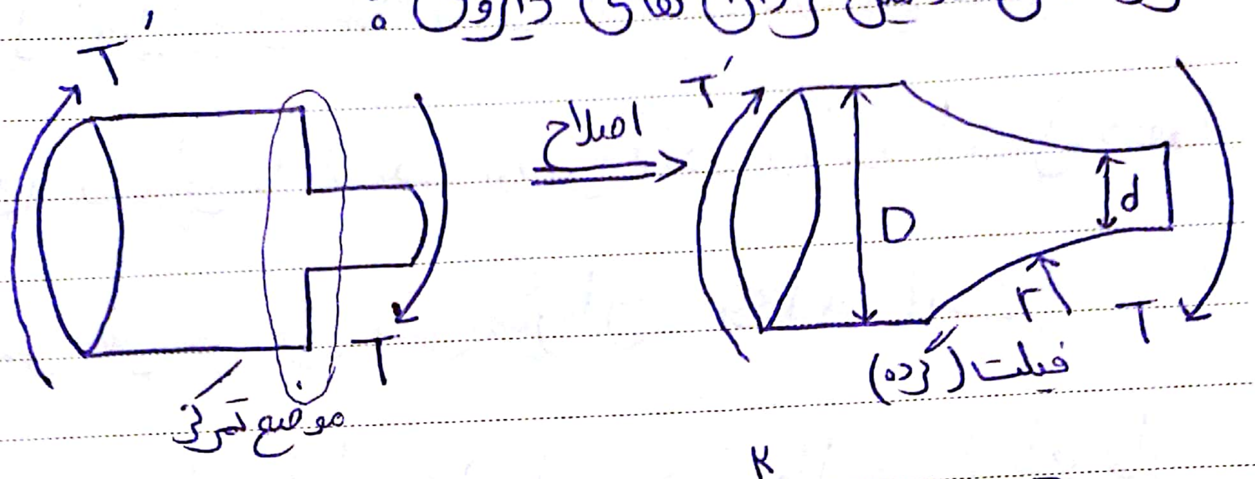
$t = 25 - 20.6 = 4.4 \ mm \xrightarrow[\text{استاندارد}]{\text{ضخامت}} 5 mm$

Scanned by CamScanner

Subject.

Date.

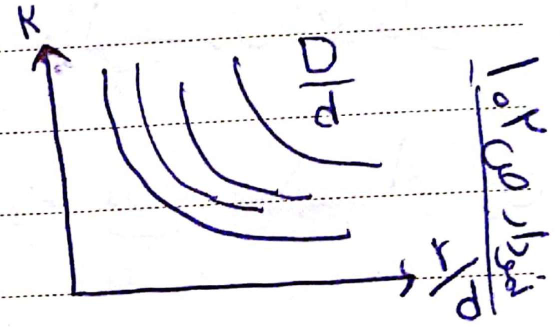
تمرکز تنش در میل گردان های دارای :



$$\tau_{max} = K\frac{TC}{J}$$

ضریب تمرکز تنش — K

برای سطح مقطع کمتر (بخش بحرانی) — $\frac{TC}{J}$



در میل گردانی که قطر سطح مقطع آن تغییر ناگهانی وجود دارد در نزدیکی ناپیوستگی تمرکز تنش داریم ! این تنش را می توان با فیلت کاهش داد

در فرمول $\tau_{max} = K\frac{TC}{J}$ مقدار $\frac{TC}{J}$ تنش محاسبه شده برای میل گردان با قطر کمتر و K ضریب تمرکز تنش است ! ضریب K فقط به نسبت قطرها $\frac{D}{d}$ و به نسبت شعاع فیلت به قطر میل گردان باریک تر $\frac{r}{d}$ بستگی دارد ! (نمودار ص ۱۰۲)

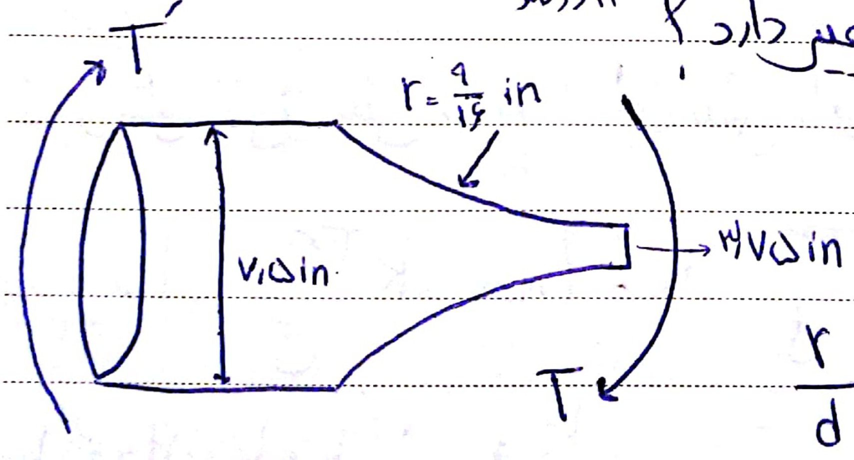
Scanned by CamScanner

مثال: میل گردان پله‌ای نشان داده شده باید با سرعت $900\ rpm$ بچرخد و توان را از یک توربین به یک ژنراتور انتقال دهد!

تنش برشی مجاز برای جنس میلگردان $8\ KSi$ است!

الف) در طراحی اولیه نشان داده شده، حداکثر چه توانی را می‌توان انتقال داد؟

ب) اگر در طرح ثانویه شعاع فیلت افزایش داده شود، طوری که $r = \frac{9}{16}\ in$ شود توان انتقالی نسبت به طرح اولیه چند درصد تغییر دارد؟ (۱۱ درصد)



$$\frac{D}{d} = \frac{7.5}{3.75} = 2$$

$$\frac{r}{d} = \frac{\frac{9}{16}}{3.75} = 0.15$$

$K = 1.33$ (از جدول)

$$\tau_{max} = K\frac{Tc}{J} \rightarrow T = \frac{\tau_{max}}{K}\frac{J}{c}$$

$$T = \frac{8}{1.33} \times \frac{\pi}{2}\frac{\left(\frac{3.75}{2}\right)^4}{\frac{3.75}{2}} = 62.3\ kip\ in$$

kip: $10^3\ lb$ پوند

Subject.
Date.

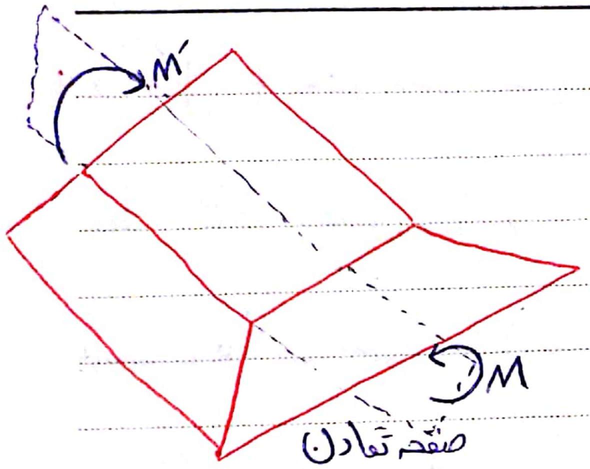
$$۹۰۰\,rpm = ۹۰۰\,\frac{rev}{min} = \frac{۹۰۰\,rev}{۶۰\,s} = ۱۵\,\frac{1}{s} = ۱۵\,Hz$$

$$T = \frac{P}{۲\pi f} \rightarrow P = ۲\pi f . T$$

$$P = ۲\pi \times ۱۵\,\frac{1}{s} \times ۶۲{,}۳\,\underbrace{kip\,in}_{۱۰^{۳}\,lb} = ۵{,}۸۷ \times ۱۰^{۶}\,\frac{in.lb}{s}$$

توان برحسب hp $P = ۵{,}۸۷ \times ۱۰^{۶} \times \frac{۱}{۶۶۰۰} = ۸۹۰\,hP$

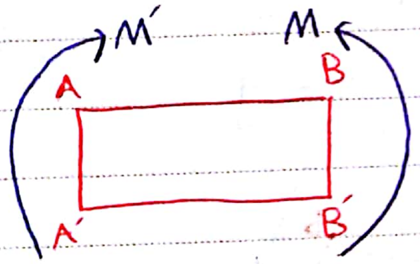
ب) خودمان (۱۱ درصد)



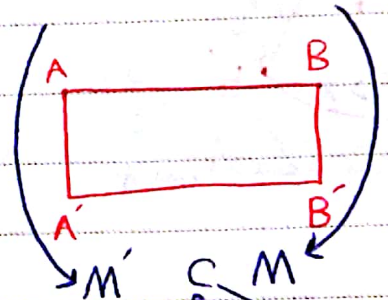
خمش محض (خمش خالص Pure bending):

در این فصل به بررسی عضوهای منشوری شکل می پردازیم که تحت اثر کوپل های مساوی و مخالف M و M' قرار دارند! چنین عضوهایی تحت خمش خالص یا محض می باشند که این کوپل های خمشی در صفحه تعادل عضو وارد می شوند!

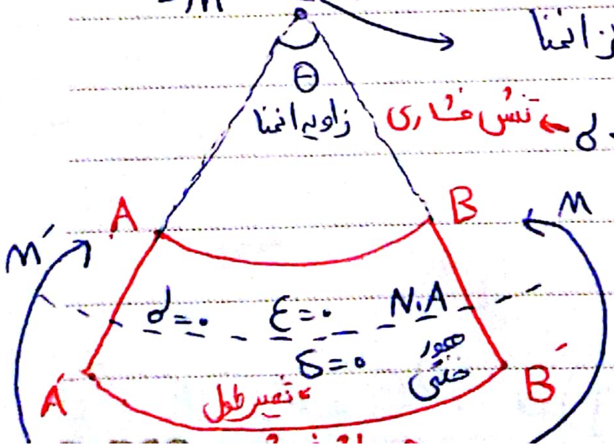
* کوپل ها در صفحه تعادل جمع وارد می شوند
* عضو منشوری شکل است



⇐ علامت کوپل ⇐ مثبت است



⇐ علامت کوپل ⇐ منفی است



AB نسبت به طول اولیه ← کاهش طول ← $\varepsilon<0$ و $\sigma<0$ ← تنش فشاری

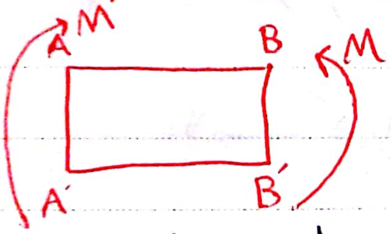
A'B' « « ← افزایش طول ← $\varepsilon>0$ و $\sigma>0$ ← تنش کششی ما

Scanned by CamScanner

Subject:
Date:

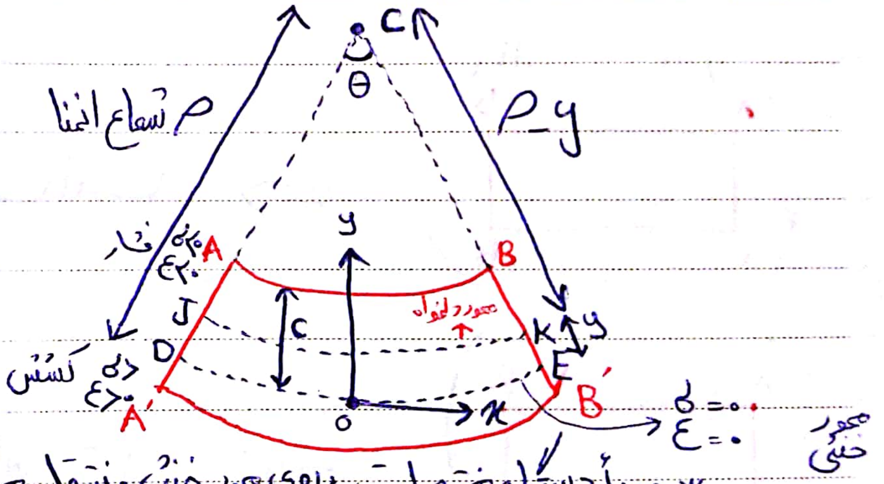
* در شکل * عضو تحت خمش محض قرار دارد! با توجه به این که علامت کوپل + است خط AB کاهش طول و A´B´ افزایش طول دارد! به عبارتی کرنش و تنش در قسمت بالایی عضو − (فشاری) و در قسمت پایین عضو + (کششی) است!

* در شکل * باید سطحی موازی با سطوح بالا و پایین عضو وجود داشته باشد که در آن تنش و کرنش صفر است! این سطح را سطح خنثی می نامند (از نمای جانبی به صورت خط خنثی (محور خنثی) دیده می شود!)



$L_{AB} = L_{A'B'} = L$

علامت کوپل خمش ← +



* مبدأ دستگاه مختصات روی محور خنثی منتقل می شود

$L_{AB} = L_{A'B'} = L_{JK} = L$

JK طول بعد از خمش $= (\rho - y)\theta$

JK طول قبل از خمش $= L = L_{DE} = \rho\theta$

تغییر طول $\delta_{JK} = \delta_2 - \delta_1 = (\rho - y)\theta - \rho\theta = \rho\theta - y\theta - \rho\theta$

$= -y\theta$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$\varepsilon_{\text{خ}K}$ (محور دلخواه) $= \frac{\delta}{L}$ (طول اولیه) $= \frac{-y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$

$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$ ← با توجه به انتخاب دستگاه مختصات

قدرمطلق کرنش ماکسیمم $\varepsilon_m = \frac{c}{\rho}$

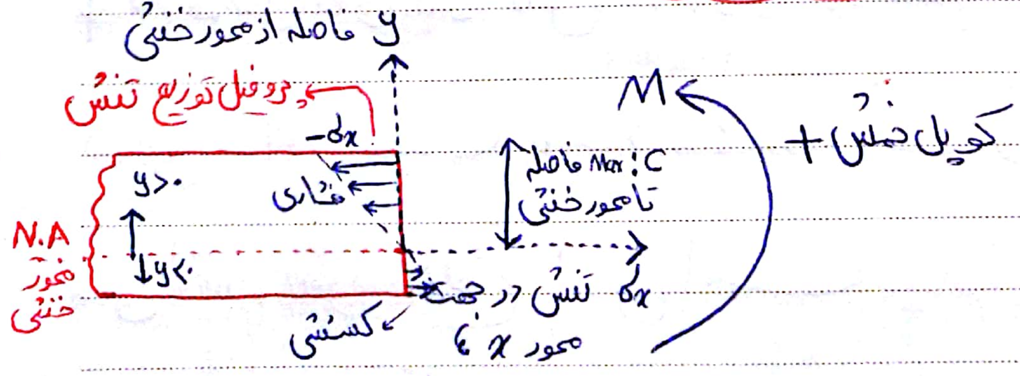
y : فاصله سطح مورد نظر از سطح (محور) خنثی

C: فاصله Max تا محور خنثی (همیشه یا روی سطح بالایی یا سطح پایینی عضو قرار دارد)

$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_m} = -\frac{y}{c} \Rightarrow \varepsilon_x = -\frac{y}{c}\varepsilon_m$

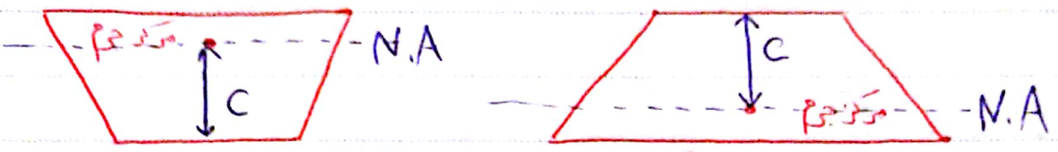
طرفین رابطه بالا را در E (مدول الاستیک) ضرب می کنیم $\Rightarrow E\varepsilon_x = -\frac{y}{c}E\varepsilon_m \xrightarrow[\text{قانون هوک}]{\sigma = E\varepsilon}$

$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m$



جسم از نمای جانبی

نکته: برای عضو تحت اثر خمش خالص تا وقتی تنش ها در محدوده الاستیک (کشسان) هستند همیشه محور خنثی از مرکز جرم مقطع (عضو) می گذرد!



نماهای جانبی یک جسم منشوری

فرمول های تنش خمشی:

$$\sigma_x = -\frac{MY}{I}$$

y: فاصله از محور خنثی

M: کوپل (گشتاور) خمش

I: ممان اینرسی

C: فاصله Max تا محور خنثی

$$\sigma_m = \frac{MC}{I}$$

قدر مطلق ماکسیمم تنش خمش

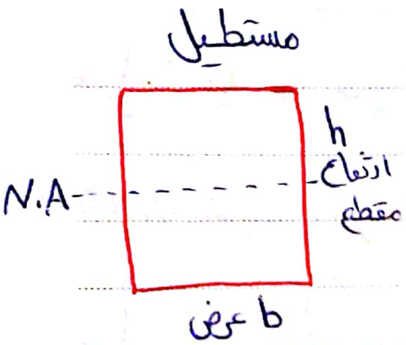
* در فرمول های بالا تنش در بالای محور خنثی $(y>0)$ وقتی گشتاور خمشی M مثبت باشد فشاری است و اگر گشتاور خمشی M منفی باشد، تنش از نوع کششی است

S مدول مقطع کشسانی

$$S = \frac{I}{C} \xrightarrow{\sigma_m = \frac{MC}{I}} \sigma_m = \frac{M}{S}$$

* $S \uparrow \rightarrow \sigma_m \downarrow \rightarrow$ مقاومت جسم در برابر خمش ↑ *

Scanned by CamScanner



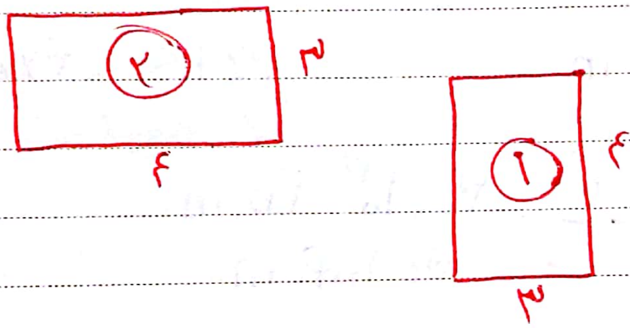
$$S = \frac{I}{C} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{\frac{h}{2}}$$ مقطع مستطیل

$$S = \frac{1}{6}bh^2 \rightarrow S = \frac{1}{6}bh.h$$

$$S = \frac{1}{6}A.h$$

سطح مقطع مستطیل

* مقاومت کدام شکل در برابر خمش بیشتره؟



$A_1 = A_2$ و $h_1 > h_2 \Rightarrow$

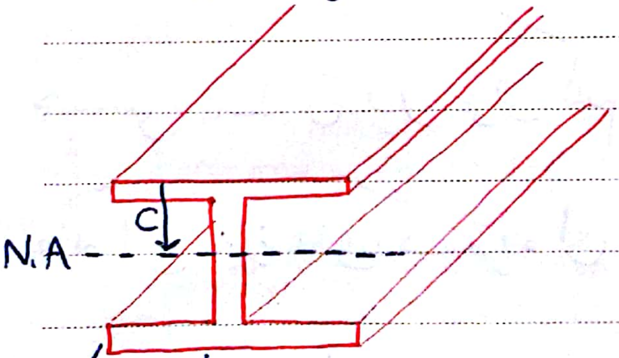
$S_1 > S_2 \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2$

$\Rightarrow$ مقاومت ② < مقاومت ①

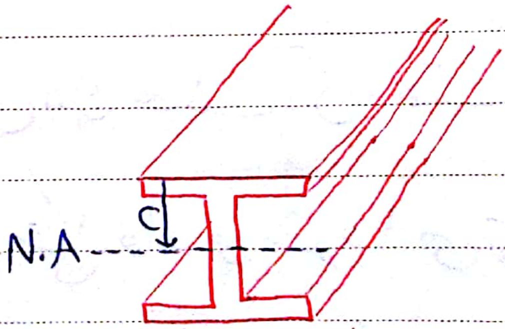
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

ρ: شعاع انحنا عضو تحت خمش

E: مدول الاستیسیته I: ممان اینرسی M: کوپل خمش



مقطع H شکل



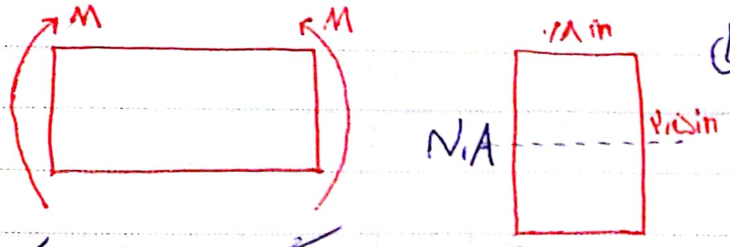
مقطع I شکل

ISO :

Subject
Date

خمش جانبی سطوح مقطع

مثال: میله فولادی با سطح مقطع مستطیلی ۰/۸×۲/۵ تحت تأثیر ۲ کوپل مساوی و مخالف قرار دارد که در صفحه تقارن قائم میله عمل می کند. مقدار گشتاور خمشی M که باعث تسلیم میله می شود را تعیین کنید ($\sigma_y = 36\,KSi$)



$$\sigma_m = \frac{MC}{I}$$

$$I_{\text{مستطیل}} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I = \frac{1}{12} \times 0/8 \times 2/5^3 = 1/042\ in^4$$

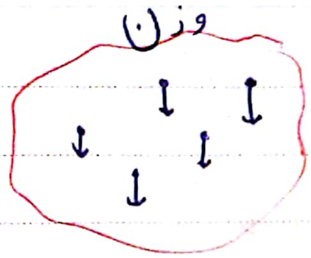
$$36\ KSi = 36 \times 10^3\ Psi \quad \left(\frac{lb}{in^2}\right)$$

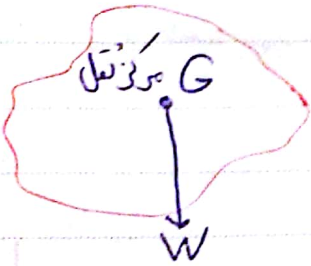
$$M = \frac{\sigma_m I}{C} = \frac{36 \times 10^3 \times 1/042\ in^4}{1/25\ in} = 30 \times 10^3\ lb.in$$

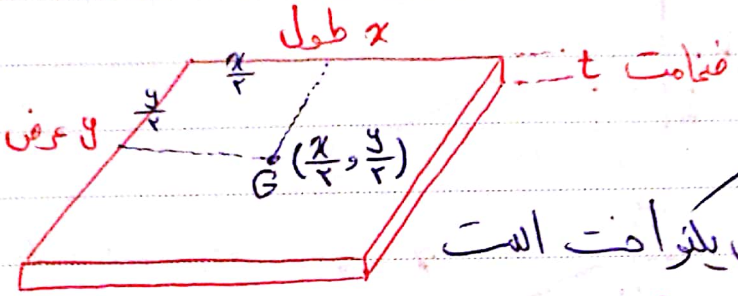
$$30\ Kip.in$$

تعیین مرکز سطوح مرکب:

مرکز ثقل: مرکز ثقل یک جسم نقطه ای است که می توان جرم یک جسم را در آن نقطه متمرکز فرض کرد و نیروی وزن جسم در آن نقطه اثر می کند. اگر جسمی مطابق زیر فرض کنیم بخش های مختلف آن تحت جاذبه زمین بوده و به آن نیروهای گسترده ای مثل شکل وارد می شود. می توان برآیند این نیروها را وزن جسم (W) و نقطه اثر آن را مرکز ثقل جسم (G) در نظر گرفت.







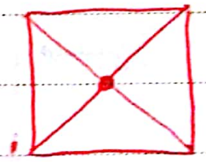
مرکز ثقل ورق ها:

ورق قطعه ای است که ضخامت آن یکنواخت است و قاعدتاً ضخامت در مقابل طول و عرضش کم است! در این صورت مرکز ثقل ورق در وسط ضخامت آن بوده و برای تعیین طول و عرض مرکز ثقل کافی است مرکز سطح ورق را تعیین کرد!

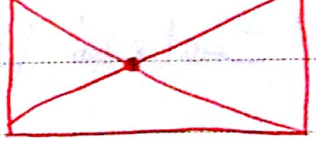
(در ورق t نسبت به x و y قابل صرف نظر کردن است)

مرکز سطح اشکال ساده هندسی:

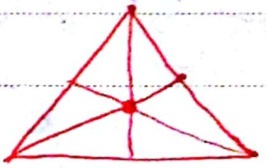
۱_ مرکز سطح محل برخورد قطرها: مربع



۲_ مرکز سطح محل برخورد قطرها: مستطیل



۳_ مرکز سطح محل برخورد میانه ها: مثلث

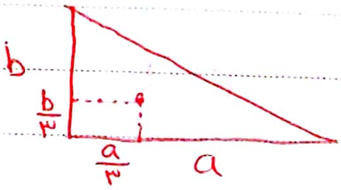


Scanned by CamScanner

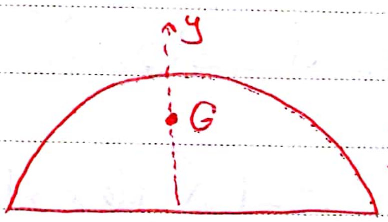
Subject
Date

۴_ مرکز سطح خود دایره است : دایره

۵_ مثلث قائم الزاویه:



۶_ نیم دایره

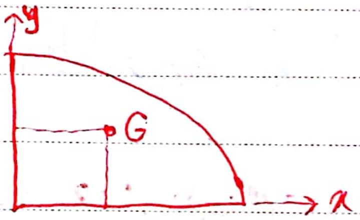


$\bar{x} = 0$

$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} = 0.424r$

r: شعاع دایره

۷_ ربع دایره

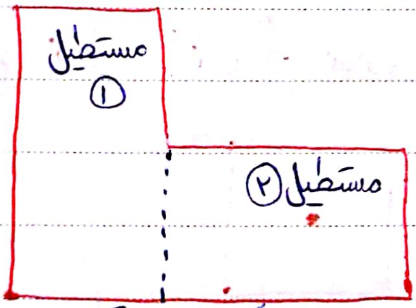


$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi} = 0.424r$

$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi} = 0.424r$

r: شعاع دایره

تعیین مرکز سطح مرکب:



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i x_i}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{A}$$

مختصات مرکز سطح مرکب

سطح مرکب سطحی است که از چند سطح ساده تشکیل شده است! برای تعیین مرکز سطح یک سطح مرکب ابتدا مرکز سطح هر یک از سطوح ساده را تعیین و از فرمول های فوق مختصات مرکز سطح کلی بدست می آید

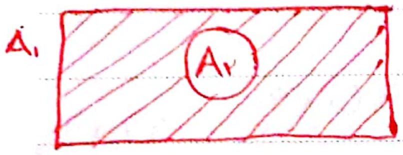
Scanned by CamScanner

Subject
Date

A : مساحت کل جسم مرکب x_i : طول هر کدام از سطوح ساده

A_i : مساحت هر کدام از سطوح ساده y_i : عرض هر کدام از سطوح ساده

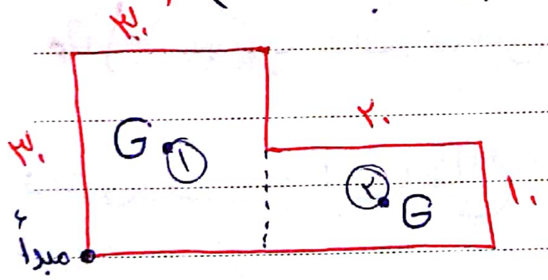
نکته: اگر قسمتی از ورق به صورت حفره یا سوراخ خالی باشد در این صورت سطح قسمت خالی را منفی در نظر می گیریم!



$$A = A_1 - A_2$$

$$\bar{x} = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A} \qquad \bar{y} = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A}$$

مثال: مرکز سطح شکل زیر را تعیین کنید (واحدها برحسب mm) ؟



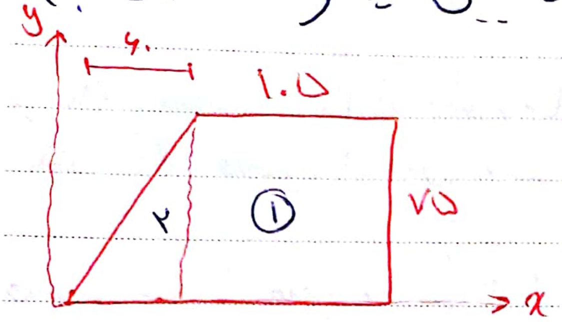
	A	x	y
①	۹۰۰	۱۵	۱۵
②	۲۰۰	۴۰	۵

$$\bar{x} = \frac{900 \times 15 + 200 \times 40}{1100\ mm^2} = 19.5\ mm$$

$$\bar{y} = \frac{900 \times 15 + 200 \times 5}{1100} = 13.2\ mm$$

Subject
Date

مثال: محل مرکز هندسی سطح نشان داده شده را تعیین کنید (واحدها برحسب mm)



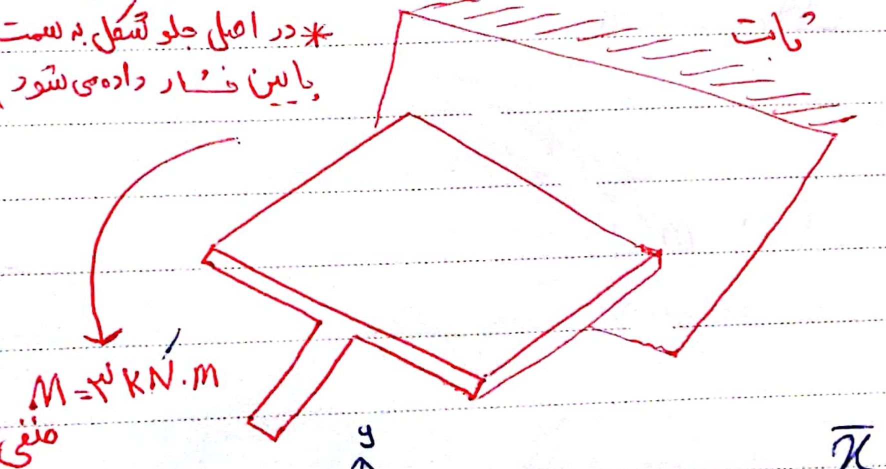
	A	x	y
①	۷۸۷۵	۱۱۲٫۵	۳۷٫۵
②	۲۲۵۰	۴۰	۲۵

$$\bar{x} = \frac{۷۸۷۵ \times ۱۱۲٫۵ + ۲۲۵۰ \times ۴۰}{۱۰۱۲۵} = ۹۶٫۳۸$$

$$\bar{y} = \frac{۷۸۷۵ \times ۳۷٫۵ + ۲۲۵۰ \times ۲۵}{۱۰۱۲۵} = ۳۴٫۷۲$$

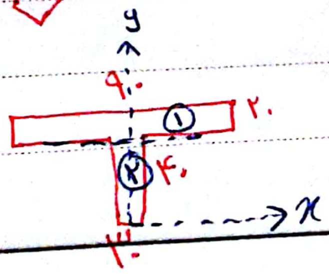
مثال: به یک قطعه ماشین چدنی کوپلی بار با ۳ kN.m مطابق شکل زیر وارد می‌شود! با این اطلاع که E = ۱۶۵ GPa ، الف) تنش‌های کششی و فشاری ماکسیمم وارد بر این قطعه و ب) شعاع انحنای قطعه تحت اثر خمش را پیدا کنید!

* در اصل جلو شکل به سمت پایین فشار داده می‌شود!



	A	x	y
①	۱۸۰۰	╳	۵۰
②	۱۲۰۰		۲۰

چون نسبت به y متقارن $\bar{x} = ۰$



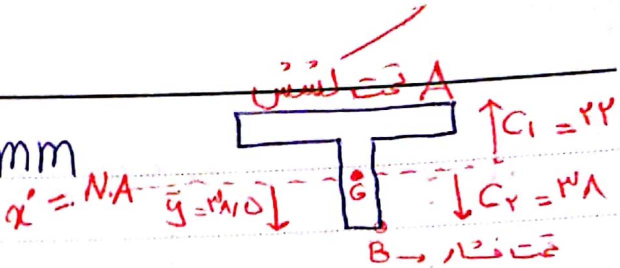
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject

Date

$$\bar{y} = \frac{1800 \times 150 + 1200 \times 20}{3000 \ mm^2} = 38 \ mm$$



← قضیه محورهای موازی

ممان اینرسی سطح مرکب

$$I_{x'} = \frac{1}{12} \times 90 \times 20^3 + (90 \times 20) \times 12^2 + \frac{1}{12} \times 30 \times 40^3 + (30 \times 40) \times 18^2 = 868 \times 10^3 \ mm^4$$

$$868 \times 10^{-9} \ m^4$$

مستطیل بالا ←   مستطیل پایین ←

$12 = 10 + 2$

$18 = 38 - 20$

کششی $\sigma_{t_{max}} = \frac{MC}{I} = \frac{3 \times 10^3 \times 22 \times 10^{-3}}{868 \times 10^{-9}} = +76.03 \ MPa$

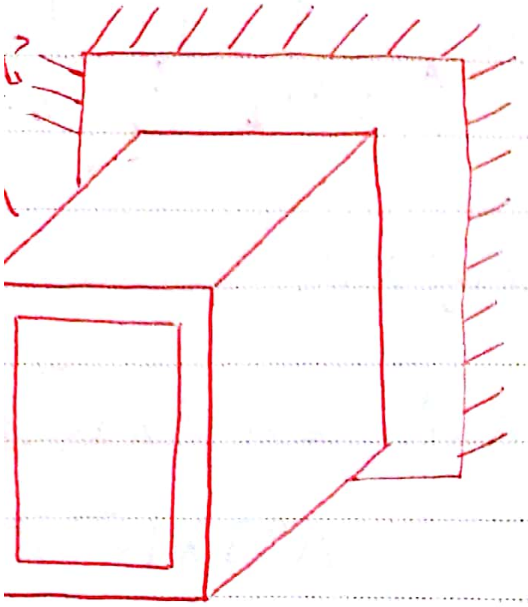
فشاری $\sigma_{c_{max}} = \frac{3 \times 10^3 \times 38 \times 10^{-3}}{868 \times 10^{-9}} = -131.31 \ MPa$

← فشاری با توجه به شکل

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \rightarrow \rho = \frac{EI}{M} = \frac{165 \times 10^9 \ \frac{N}{m^2} \times 868 \times 10^{-9} \ m^4}{3 \times 10^3 \ N.m} = 47.74 \ m$$

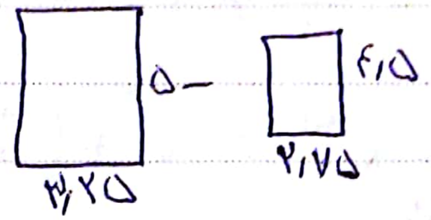
مثال: با استفاده از آلیاژ آلومینیوم که برای آن $\sigma_y = 40 \ ksi$ و $\sigma_u = 60 \ ksi$ و $E = 10.6 \times 10^6 \ psi$ است برای مقطع داده شده گشتاور خمشی که به ازای آن ضریب ایمنی برابر ۳ است را تعیین کنید و ب) شعاع انحنای متناظر لوله را در اثر خمش تعیین کنید!

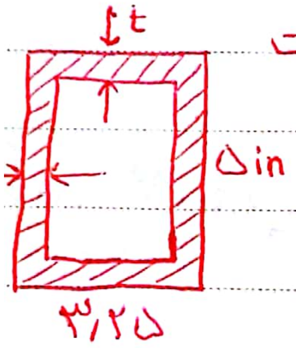
Scanned by CamScanner



$$\sigma_{all} = \frac{\sigma_u}{S.F} \rightarrow \frac{60}{3} = 20\ KSi$$

$$I = \frac{1}{12}\left(3.25 \times 5^3 - 2.75 \times 4.5^3\right) = 12.97\ in^4$$





$$\sigma_{all} = \frac{MC}{I} \rightarrow 20\ KSi = 20 \times 10^3\ \frac{lb}{in^2}$$

$$20 \times 10^3 = \frac{M \times 2.5\ in}{12.97\ in^4}$$

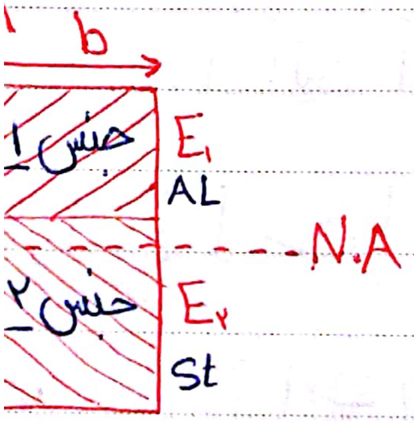
$$M = \frac{20 \times 10^3\ \frac{lb}{in^2} \times 12.97\ in^4}{2.5\ in} = 103000\ lb.in$$

$$= 103\ Kip.in$$

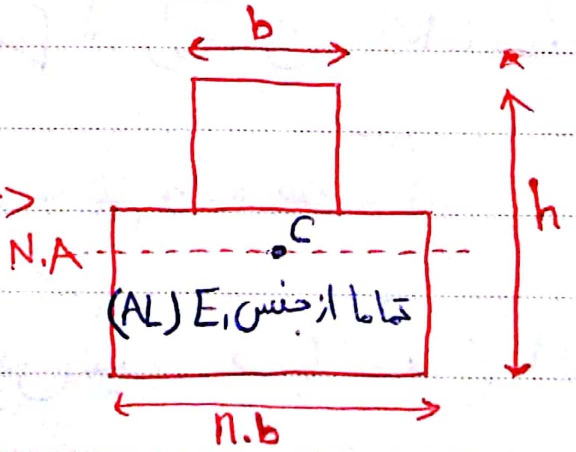
$Kip = 1000\ lb$

$$= \frac{M}{EI} \longrightarrow \rho = \frac{EI}{M} = \frac{10.6 \times 10^6 \times 12.97}{103 \times 10^3} = 1334.77$$

خمش در عضوهایی که از چند ماده مختلف تشکیل شده اند.



$\Rightarrow$



C: مرکز سطح مقطع تبدیل یافته

$E_2 > E_1$

$= \frac{E_2}{E_1}$

مقطع تبدیل یافته: تماما جسم مرکب را به جنس با مدول الاستیسیته

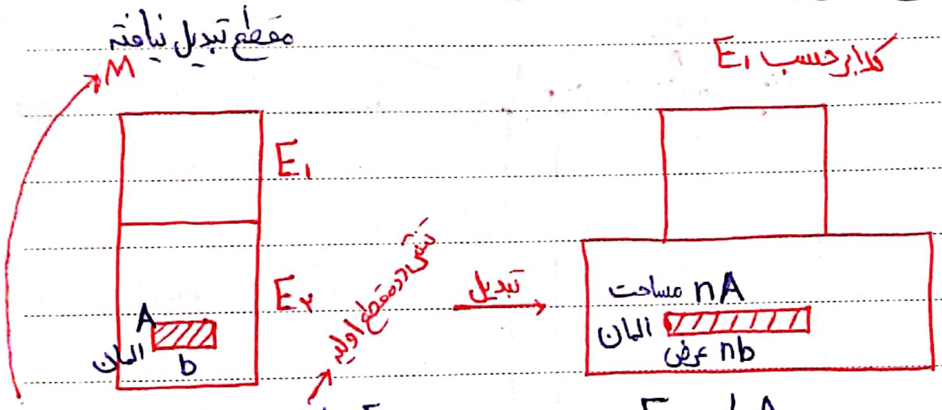
... تبدیل می کنیم

Scanned by CamScanner

Subject
Date

اگر عضو تحت خمش از ۲ یا چند ماده با مدول های الاستیسیته مختلف تشکیل شده باشد، باید روش تعیین تنش های خمشی را تغییر دهیم! در این روش پهن شدن $(n>1)$ و باریک شدن یا انقباض $(n<1)$ باید در راستای موازی با محور خنثی مقطع صورت گیرد!

فاصله y از محور خنثی باید یکسان بماند! سطح مقطع جدیدی که به این طریق بدست می آید (بر حسب مدول پایین تر) را مقطع تبدیل یافته عضو می نامند!



$E_2 > E_1$ $\qquad \sigma = \frac{F}{A}$ $\qquad F_2 = \sigma_2 A_2$

$n = \frac{E_2}{E_1}$ $\qquad F_1 = \sigma A$ $\qquad F_2 = \sigma_2 nA$ $\qquad F_1 = F_2$

نیروی تولید کننده خمش قطعا ثابت است

$\sigma A = \sigma_2 nA \rightarrow \sigma_2 = \frac{\sigma}{n}$ تنش در مقطع تبدیل یافته

F_1: نیروی وارد شده به جسم مرکب

σ: تنش وارد به جسم مرکب

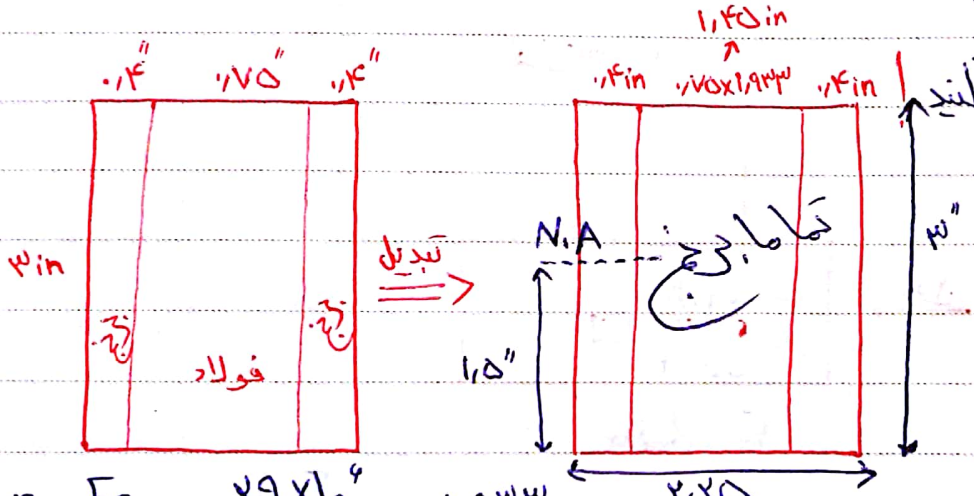
برای بدست آوردن تنش در نقطه ای واقع در بالای سطح مقطع میله مرکب فقط تنش در نقطه متناظر مقطع تبدیل یافته را با استفاده از فرمول $\sigma_x = -\frac{My}{I}$ محاسبه می کنیم

اما برای محاسبه تنش در نقطه ای واقع در پایین قسمت سطح مقطع، تنش $\sigma_x = -\frac{My}{I}$

* از مقطع تبدیل یافته که به مقطع اولیه برمی‌گردیم مساحت را بر n تقسیم می‌کنیم $n = \frac{E_2}{E_1}$

و تنش را در n ضرب می‌کنیم!

مثال: در شکل زیر سطح مقطع میله‌ای را نشان داده‌ایم که از اتصال قطعات فولاد و برنج به یکدیگر بدست آمده است! $E_{st} = 29\times10^{6}$ PSi و $E_b = 15\times10^{6}$ PSi است! تنش Max را در فولاد و در برنج وقتی که میله بر اثر گشتاور خمشی 40 kip.in تحت خمش قرار دارد را حساب کنید!



$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{29\times10^{6}}{15\times10^{6}} = 1.933$$

ممان اینرسی مقطع تبدیل یافته $I = \frac{1}{12} \times 2.25 \times 3^{3} = 5.063\ in^{4}$

$$\sigma_m = \frac{MC}{I} = \frac{40\times10^{3}\ lb.in \times 1.5\ in}{5.063\ in^{4}} = 11.85\times10^{3}\ \underbrace{\frac{lb}{in^{2}}}_{PSi} = 11.85\ KSi$$

$$\sigma_{m_{st}} = 11.85\times1.933 = 22.9\ KSi$$

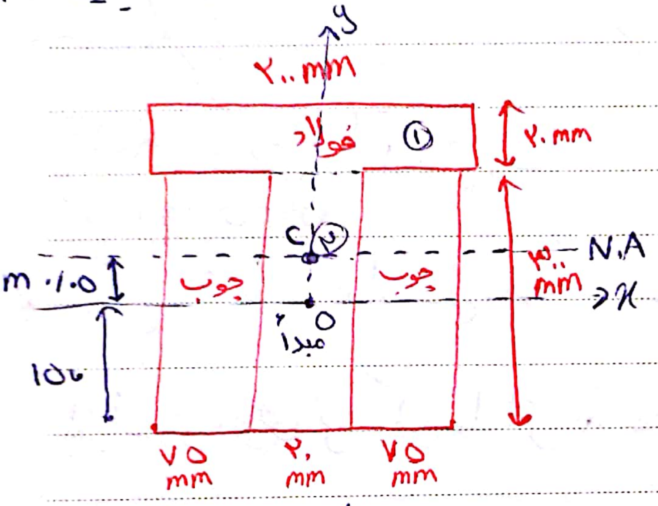
* همان طور که قبلاً گفتیم هرگاه از مقطع تبدیل یافته به مقطع اصلی برمی‌گردیم باید

Scanned by CamScanner

تیر فولادی زیر را با پیچ کردن ۲ قطعه چوب مطابق شکل زیر تقویت کرده اند!

$E_{st}=200\ GPa$ و $E_w=12.5\ GPa$! با این اطلاع که کوپل $M=50\ kN.m$ است:

الف) تنش Max در چوب؟ ب) تنش در فولاد در امتداد لبه بالایی را تعیین کنید؟



$$A_1 = 3200 \times 20 = 64000$$

$$A_2 = 300 \times 470 = 141000$$

$$A = A_1 + A_2 = 205000$$

$$\bar{x} = 0$$

$$n = \frac{E_{st}}{E_w} = \frac{200}{12.5} = 16$$

$$\bar{y} = \frac{64000 \times 160 + 141000 \times 0}{205000} = 50\ mm = 0.05\ m$$

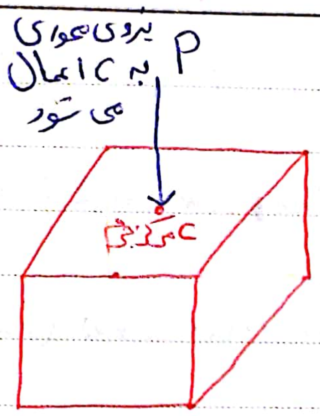
$$I = \frac{1}{12} \times 3.2 \times (0.02)^3 + (3.2 \times 0.02)(100 + 10 \times 10^{-3}) + \frac{1}{12} \times 0.47 \times (0.3)^3 + (0.05)^2 (0.47 \times 0.3) = 2.19 \times 10^{-3}\ m^4$$

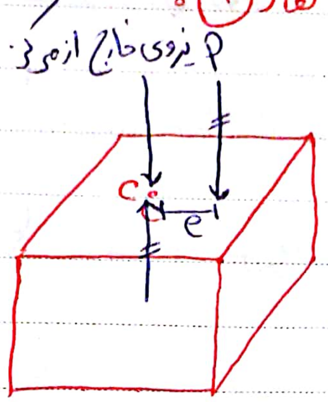
$$\sigma_w = \frac{MC}{I} = \frac{50 \times 10^3 \times 0.2}{2.19 \times 10^{-3}} = 4.67 \times 10^{6}\ Pa$$

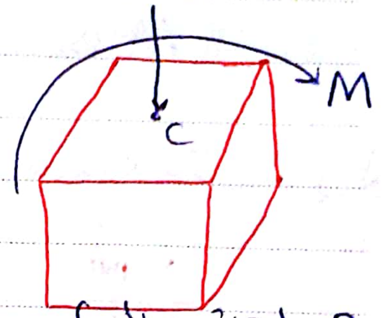
$$16 \times \sigma_s = 16 \times \frac{50 \times 10^3 \times 0.12}{2.19 \times 10^{-3}} = 43.8\ MPa$$

Scanned by CamScanner

بارگذاری محوری خارج از مرکز در صفحه تقارن:





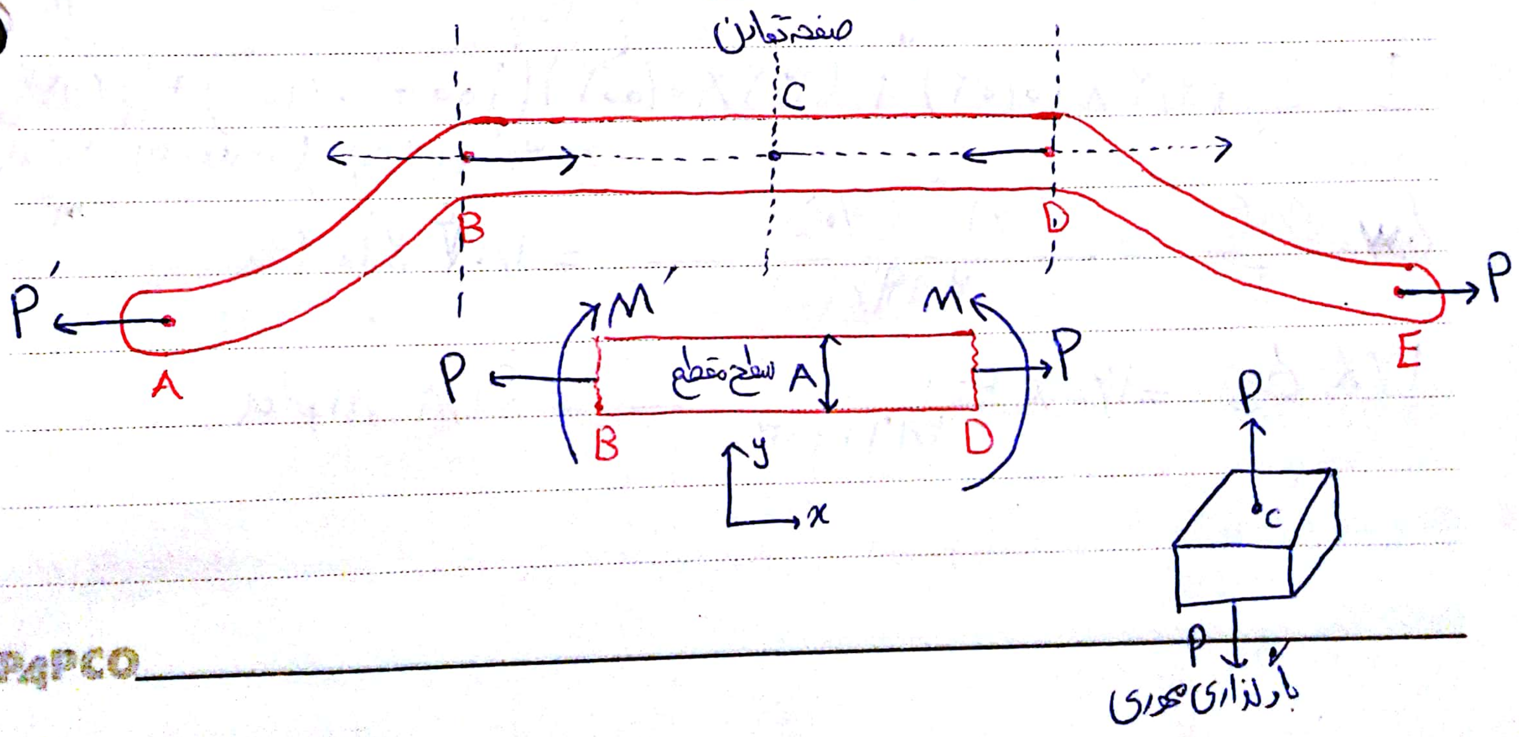


c: مرکز سطح مقطع بالا   e: مقدار خروج از مرکز

P: تولید تنش نرمال
M: تولید تنش خمشی
} ترکیب از تنش مرکب

* توزیع تنش ها در سطح مقطع عضوی که تحت بارگذاری محوری قرار دارد تنها در صورتی می توان یکنواخت فرض کرد که خط اثر بار های P از مرکز جرم (مرکز سطح مقطع) بگذرد. این نوع بارگذاری را مرکزی می نامند ولی اکنون توزیع تنش ها را در حالتی بررسی می کنیم که خط اثر نیرو از مرکز جرم سطح مقطع نمی گذرد!

بارگذاری خارج از مرکز



$\sigma_x = -\frac{\ }{I}$

تنش مرکب $\sigma_x = \sigma_n + \sigma_b$ (تنش)

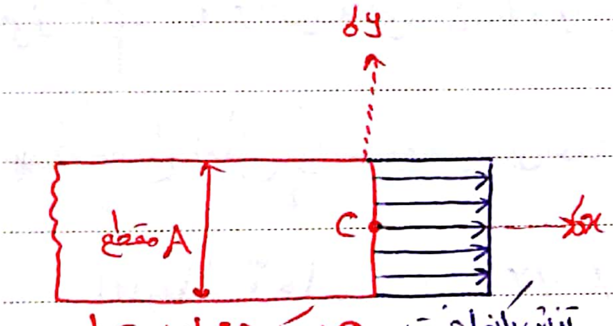
$\sigma_m = \frac{Mc}{I}$ قدرمطلق ماکزیمم

فرمول تنش مرکب برای بارگذاری خارج از مرکز:

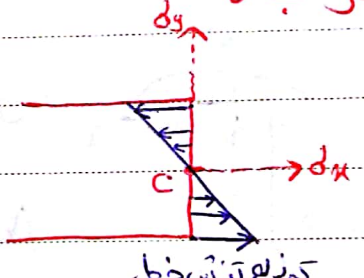
$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$

نکته: توزیع تنش ناشی از بارگذاری خارج از مرکز را می‌توان با جمع (برهم نهی) توزیع تنش یکنواخت متناظر با بارهای مرکزی P و P' و توزیع خطی متناظر با کوپل های خمشی M و M' بدست آورد!

نمودار تنش مرکب:



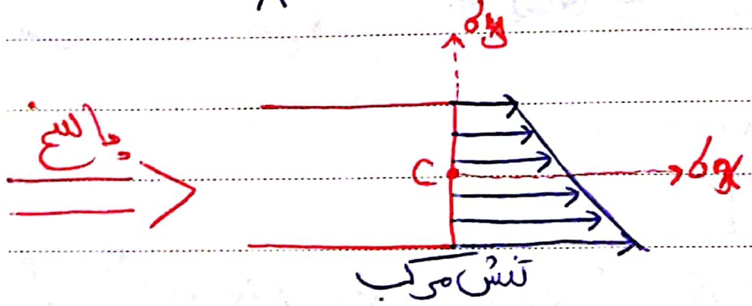
برهم نهی +



$\sigma_{1x} = \frac{P}{A}$

$\sigma_{2x} = -\frac{My}{I}$

$y = ax$



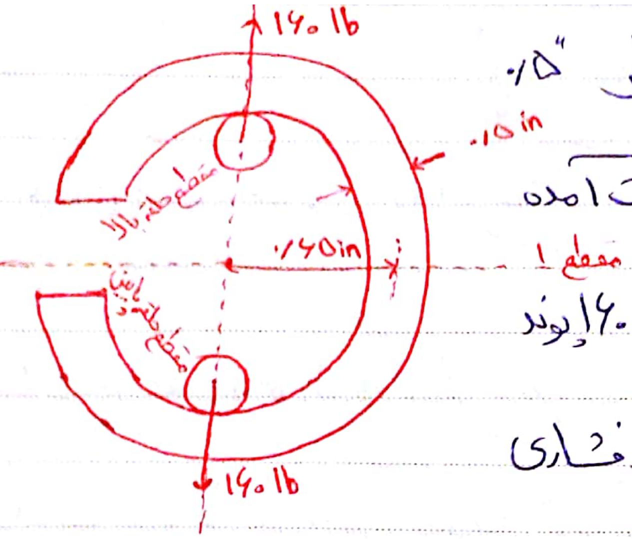
توزیع تنش خطی و غیر یکنواخت

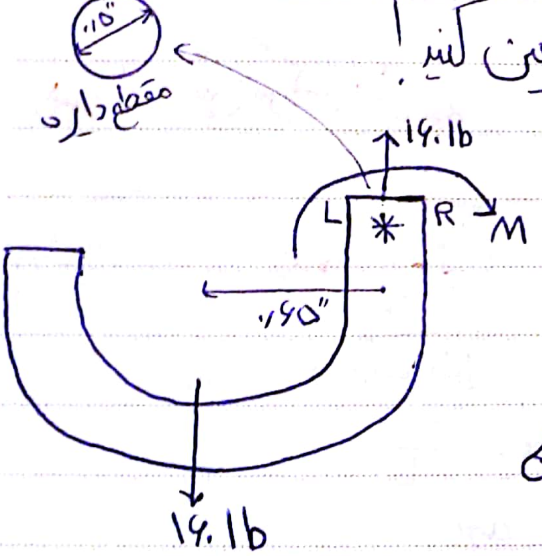
طبق رابطه $\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$ توزیع تنش های کلی در مقطع خطی است ولی یکنواخت نیست! بسته به شکل هندسی مقطع و مقدار خروج از مرکز نیرو تنش های ترکیب شده می‌توانند هم علامت باشند و یا مختلف العلامت!

PAPCO

Scanned by CamScanner

مثال: از خم کردن مفتول فولادی به قطر ۰/۵" زنجیری با حلقه های باز مطابق شکل بدست آمده است! می دانیم که این زنجیر نیروی برابر با ۱۶۰ پوند را تحمل می کند! الف) بزرگترین تنش کششی و فشاری در سمت راست یک حلقه و ب) فاصله میان محور مرکز جرم C و محور خنثی N.A برای یک مقطع را تعیین کنید!





دیاگرام آزاد پایین مقطع ①

R: فشار   L: کشش

* در مقطع تنش مرکب ← هم تنش محوری + هم تنش خمشی

$$M = 160\ lb \times 0.65\ in = 104\ lb.in$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{160\ lb}{\frac{\pi}{4}(0.5)^2\ in^2} = 815\ psi$$

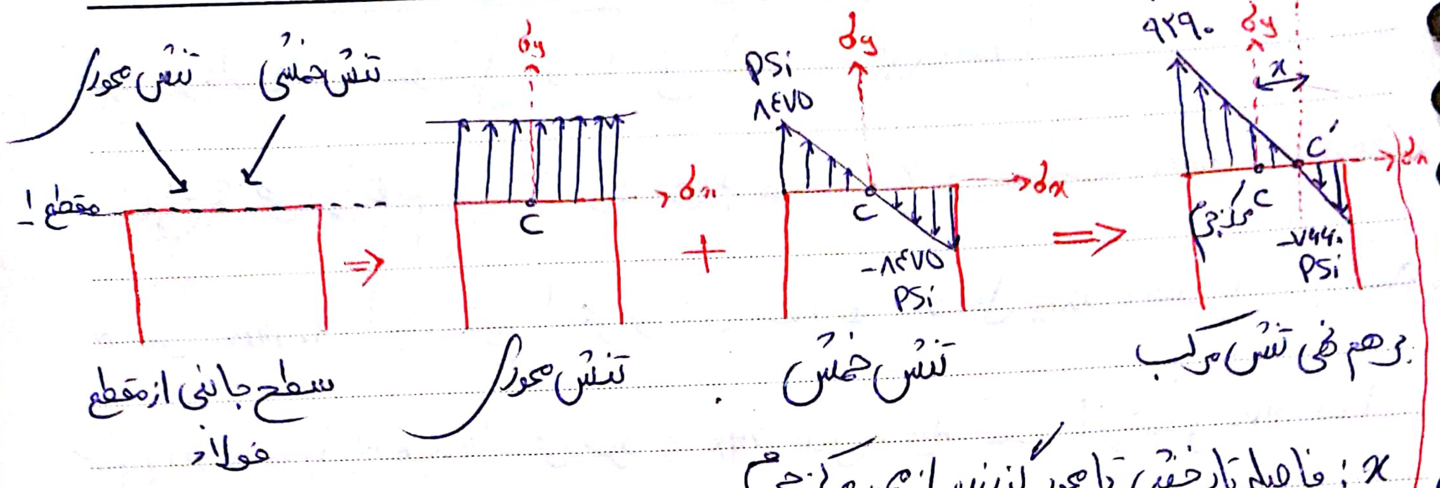
* تنش نرمال محوری در مقطع

$$\sigma_m = \frac{MC}{I}$$

مقطع دایره $I = \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{\pi}{4} \times (0.25)^4 = 3.068 \times 10^{-3}\ in^4$

$$\sigma_m = \frac{104\ lb.in \times 0.25\ in}{3.068 \times 10^{-3}\ in^4} = 8475\ psi$$

Subject
Date



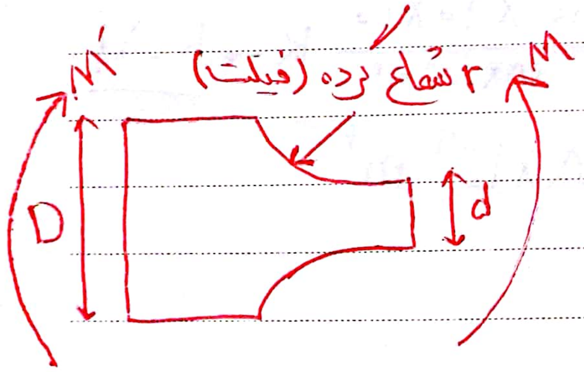
x : فاصله تار خنثی تا محور گذرنده از محور مرکز جرم

$$\sigma_y = \frac{P}{A} - \frac{Mx}{I}$$ ← چون تار خنثی عمودیه، بجای y، x می‌گذاریم

در تار خنثی ⟶ $\sigma_y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{P}{A} - \frac{Mx}{I}$

$$\frac{P}{A} = \frac{Mx}{I} \Rightarrow x = \frac{PI}{AM} = ۸۱۵\ \text{psi} \times \frac{۳/۰۶۸ \times ۱۰^{-۳}\ \text{in}^{۴}}{۱.۴\ \text{lb.in}} = ۰/۰۲۴\ \text{in}$$

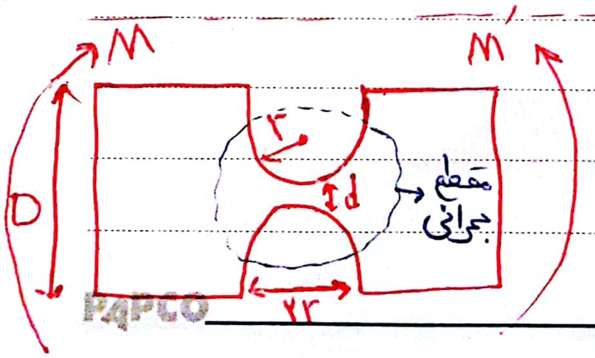
تمرکز تنش در قطعات تحت خمش:



$$\sigma_m = K\frac{MC}{I}$$

K ← نمودار ضریب تمرکز تنش
ص ۱۴۱

C و I مربوط به مقطع بحرانی (لاغرتر)



$$\sigma_m = K\frac{MC}{I}$$

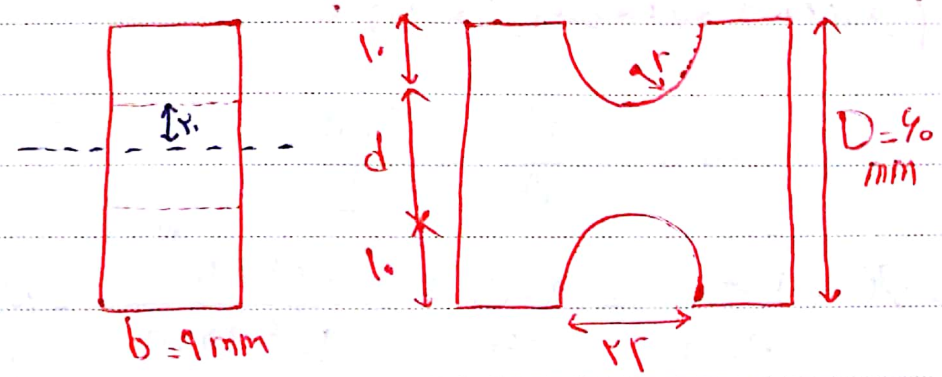
K: ضریب تمرکز تنش
C و I مربوط به مقطع بحرانی

Scanned by CamScanner

* نمودارها در موبایل و آخر کتاب می باشد!

مثال ۵: می خواهیم در میله فولادی به پهنای ۶۰ mm و ضخامت 9mm شیارهای به عمق ۱۰ mm ایجاد کنیم! عرض این شیارها حداقل چقدر باشد تا وقتی گشتاور خمشی ۱۸۰ N.m به میله وارد می شود max تنش در میله تحت از خمش ۱۵۰ MPa می باشد!

$r/d = 0.13$



$$\sigma_m = K\frac{Mc}{I} \longrightarrow 150\times10^{6} = \frac{180\times20\times10^{-3}}{48\times10^{-9}\,m^4}K \rightarrow K = 2$$

$$I = \frac{1}{12}\times9\times10^{-3}\times(0.04)^3 = 48\times10^{-9}\ m^4$$

$$r = 0.13\times40 = 5.2\ mm$$

عرض شیار $= 2r = 10.4\ mm$

Scanned by CamScanner